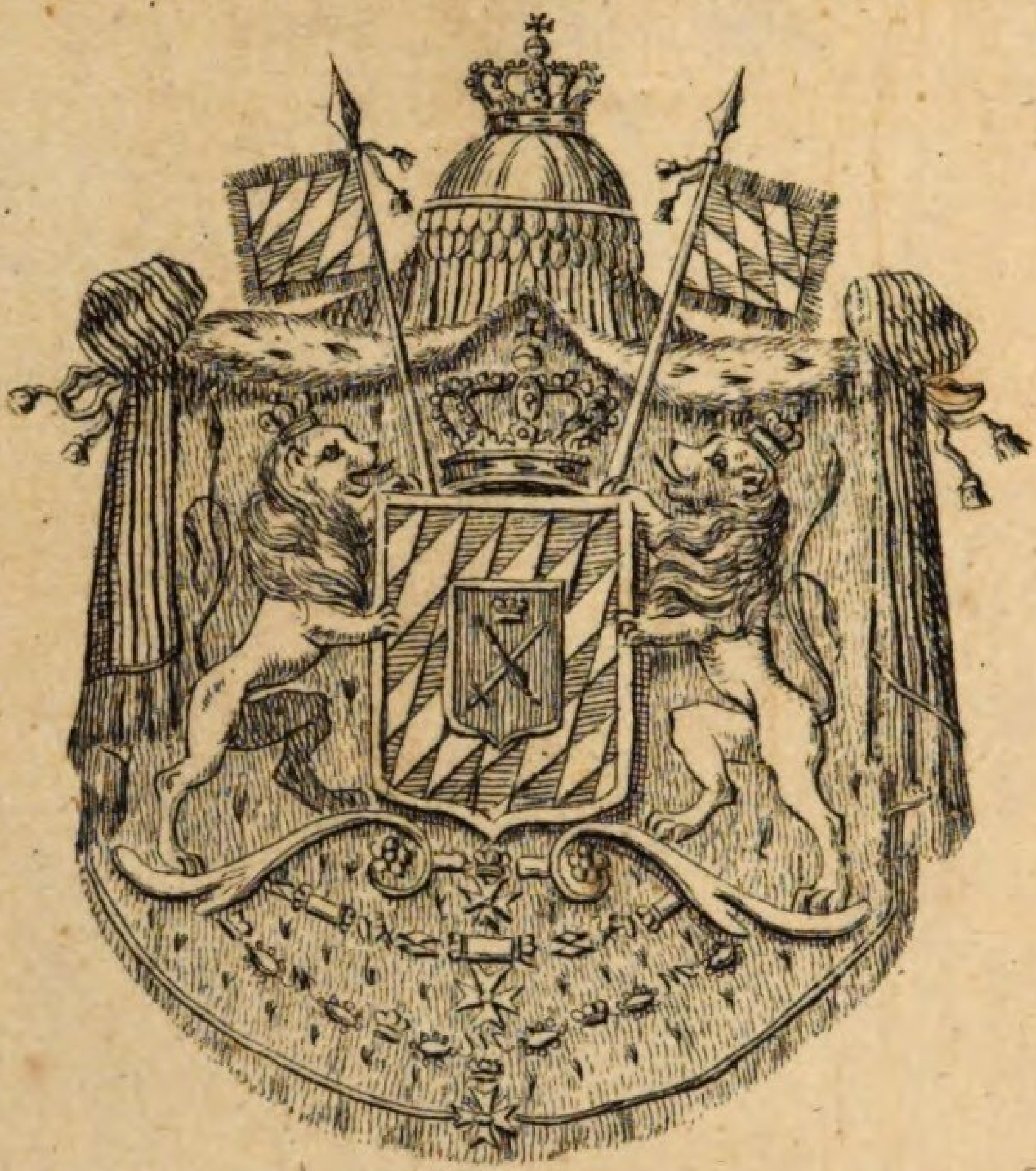
8 Math. P. 409m
(3



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

R

Unterricht

in der

Mathematischen Analysis

und

Maschinen-Lehre

[3]: Beylage

zum

ersten und zweyten Bande

Erweiterungen und Berichtigungen

enthaltend

Verfaßt

von

Johann Pasquich

der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften auswärtigem Mitgliede, und vormaligem Professor der höheren Mathematik an der Ungarischen Universität zu Pest

Leipzig

in der Weidmannischen Buchhandlung 1798.

3321

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Dem

Wohlgebohrnen Herrn

Georg Sigismund Lakics

Seiner Kaiserl. Königlichen Majestät

Hofrathe

Der

Ungarischen Studien-Commission Beysitzer

Der

Juristischen Facultät

an der Königlichen Universität zu Pest Director

und Präses

Und

der Universitäts-Buchdruckerey

Director

Widmet

Diese Schrift

Als ein

Zeugniß

Seiner immerwährenden Verehrung

Und freundschaftlichen

Hochachtung

Der

Verfasser.

Vorrede.

Je weniger ich selbst mit meiner bisherigen Arbeit zufrieden bin, zu desto größerem Vergnügen gereicht mir der ausnehmende Beyfall, mit dem die beyden Bände meines Unterrichts in der Mathematischen Analysis von Kennern sind aufgenommen worden: ich würde ihn besser verdient haben, wenn ich nicht das Unglück gehabt hätte, mich, als ich daran arbeitete, in den mißlichsten Gesundheitsumständen zu befinden: dieses mag mir, wegen der darin vorhandenen Mängel, zur Entschuldigung dienen.

Mein Vorsatz war, die Berichtigungen mangelhafter Stellen und eine genaue Anzeige der Schreib- und Druckfehler, nebst Verbesserungen im dritten Bande bekannt zu machen; welches auch schon lange geschehen seyn würde, wenn der Krieg die Herausgabe desselben nicht gehindert hätte. Erst jetzt hat sich die Verlagshandlung entschließen können, mit der Herausgabe meiner mechanischen Abhandlungen nächstens den Anfang zu machen, welche aber aus manchen Beweg-

gründen, statt der Fortsetzung des angefangenen Werks, ein neues Werk in lateinischer Sprache, unter dem Titel: *Opuscula Statico-Mechanica*, ausmachen sollen, worüber ich mich an einem andern Orte umständlich erklären werde: und eben durch diesen Umstand bin ich vor vier Monaten zur Abfassung dieser Beylage veranlaßt worden.

Der Zweck, den ich durch sie zu erreichen wünsche, bestehet lediglich darin, durch Berichtigung und Erweiterung des in beyden Bänden enthaltenen Unterrichts in der mathematischen Analysis, und durch Anwendung dieser auf die Auflösung einiger zur höheren Geometrie und Mechanik gehörigen Fundamentalaufgaben, soviel zur Vollständigkeit desselben Unterrichts beyzutragen, als ein Anfänger nöthig hat, um auch den richtigen Gebrauch der Analysis daraus kennen zu lernen. Habe ich diesen Zweck wirklich erreicht; so ist dadurch für die Brauchbarkeit jenes Unterrichts, auch unabhängig von der Fortsetzung, die nun wegfallen soll, genugsam gesorgt worden.

Unter andern hat der mir unbekannte Hr. Recensent in der Allgem. Litt. Zeitung im Jahre 1792. No. 275. manche Bemerkungen gegen den Inhalt des zweyten Bandes gemacht, und am Ende gewünscht, daß sie dem Verfasser und seinen Lesern nicht überflüßig scheinen mögen. Es läßt sich schon aus meiner obigen Erklärung leicht abnehmen, daß ich sie von Kennern wirklich erwartete: einige waren wichtig und gegründet, die

mir demnach nichts weniger als überflüßig scheinen konnten, wovon in gegenwärtiger Beylage der Beweis gegeben wird: indessen hätte ich gewünscht, daß einige andere Bemerkungen entweder anders lauteten, oder gar nicht da stünden.

Wenn z. B. Hr. Recensent sagt: „Die Differentialien nennt der Verfasser immer mit einem ungewöhnlichen Namen, **Verschwindungsquotienten.** „Schon daraus übersieht man, von welchen Begriffen „er ausgeht, und nach welcher Methode er die Gründe „der sogenannten Rechnung des Unendlichen festsetzt.“ So wird ja dadurch jedem Kenner ein ganz verkehrter Begriff von der Vorstellungsart, deren ich mich bediene, beygebracht, anstatt daß er in den Stand gesetzt werden sollte, sich einen ächten Begriff davon zu machen. Das, was alle Analysten das Differential einer Function y nennen, und mit dy bezeichnen, wird ja bey mir nicht der Verschwindungsquotient genannt: ist $\Delta y = \alpha \Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 + \text{etc.}$, mithin $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha + \beta \Delta x + \gamma \Delta x^2 + \text{etc.}$; so heißt bey mir der Verschwindungsquotient der völlig bestimmte Werth α, welchen der Differenzquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ im Verschwindungszustande der Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe x haben würde: diesen bezeichne ich mit dy, anstatt daß dy sonst das Differential von y, als o, oder als eine wirkliche, doch unendlich kleine Differenz

von y, und $\frac{dy}{dx} = \alpha$ den Exponenten des Differentialverhältnisses bedeutet. Ueberall habe ich nur die Exponenten der Differentialverhältnisse, als endliche Größen, zum Gegenstande der Differentialrechnung gemacht, nur sie von einem andern Gesichtspuncte betrachtet, daher auch anders benannt, und ihre Eigenschaften aus untrüglichen Gründen abgeleitet, unabhängig von allen Begriffen des Unendlichen: die Differentialrechnung erscheint daher im zweyten Bande als ein Theil der Analysis endlicher Größen, und die Methode, deren ich mich zur Erfindung der Exponenten der Differentialverhältnisse unbekannter Functionen daselbst bedient habe (20. §. Zus.), ist nichts anders, als eine Anwendung der Archimedeischen Exhaustionsmethode.

Wie ich von der Archimedeischen Exhaustionsmethode, und ihrem Zusammenhange mit der Differentialrechnung denke, habe ich im vierten Abschnitte dieser Beylage zu zeigen gesucht, wozu ich mich nur einiger Bruchstücke meiner critischen Untersuchungen über den Ursprung und Fortgang der Gränzenlehre bedient habe. Im zweyten Abschnitte habe ich die Gründe der Differentialrechnung aus den gewöhnlichen Begriffen der Gränzen und Differentialverhältnisse abgeleitet, und auch jetzt die Differentialrechnung als einen Theil der Analysis endlicher Größen betrachtet; man kann aber aus (57. §.) den ganz richtigen Schluß machen: der Exponent dy des Differentialverhältnisses

jeder

jeder Function y von einer absoluten veränderlichen Größe x ist also der ganz bestimmte endliche Werth (bey der Voraussetzung, daß y endlich ist), welchen der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ im Verschwindungszustande der Differenz Δx haben würde. Durch diesen einzigen Schluß würde man alle folgende Untersuchungen, vom 58sten §. an, in die im zweyten Bande verwandeln, wodurch ich den Vortrag abzukürzen gesucht habe.

Ist es aber gestattet, bey der Betrachtung der Differentialverhältnisse $\Delta x = 0$ zu setzen? Gesetzt, man habe $\Delta y = K\Delta x + L\Delta x^3 + M\Delta x^3 + \text{etc.}$, mithin $\Delta y : \Delta x = (K + L\Delta x + M\Delta x^2 + \text{etc.}) : 1$. Nun können hier zwo Fragen entstehen, nämlich: wie groß ist hier der Exponent des Differentialverhältnisses von x? und wie erhält man ihn aus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = K + L\Delta x + M\Delta x^2 + \text{etc.}$? Die Beantwortung der ersten Frage giebt der Begriff an, den man sich von einem Differentialverhältnisse gemacht hat: aus der gewöhnlichen Erklärung (52. §.) folgt, er müsse $= K$ seyn (56. §): eben dadurch wird aber auch die Beantwortung der zweyten Frage bestimmt, daß nämlich der Exponent des Differentialverhältnisses von y aus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ erhalten wird, wenn man hier $\Delta x = 0$ setzt. Ich habe zwar nirgends in dieser Beylage $\Delta x = 0$ gesetzt, doch wäre dieses erlaubt gewesen, etwa wenn einige Untersuchungen dadurch hätten

abgekürzt werden sollen. Selbst L'Huilier, der doch alles aus den eigentlichen Begriffen der Differentialverhältnisse abzuleiten sich bemühet hat, behauptet in seiner Preisschrift, da, wo von Gränzen der Verhältnisse $\Delta y : \Delta x$ die Rede ist, sey wirklich $\Delta x = 0$. „*Donc, en particulier, ce dernier membre reste le même,* „*lorsqu' aux parties qui le composent on substitue leurs* „*limites; ce qui a lieu en faisant* $\Delta x = 0$." (pag. 81.). Und an einem andern Orte (pag. 143.): „*mais cette* „*dernière expression n'est juste qu'en tant que la sous-* „*sécante se reduit à sa limite, qui est la soustangente,* „*lorsqu' au rapport des changements simultanés de l'or-* „*donnée et de l'abscisse on substitue la limite de ce* „*rapport, dans lequel cas* Δx *est toujours rigoureu-* „*sement zéro.*"

Eine andere Bemerkung des Hrn. Recensenten wird wohl auch diese Beylage betreffen, ob ich gleich hier nach seinem Wunsche, die Differentialverhältnisse als Gränzen der Differenzverhältnisse betrachtet, und alles aus diesem festgehaltenen Begriffe abgeleitet habe. „Nach des Verfassers Begriff und Bezeichnung §. 5." (in gegenwärtiger Beylage 52. §.) „bezieht sich — sagt Hr. Recensent, — „jedes Differential einer Function „(das immer als Vermehrungsquotient betrachtet wird) „auf das als Einheit angenommene Differential der ver- „änderlichen Größe: was ist nun bey dy^{uv} die Einheit?" Diese Frage kann nur durch (55. §.) hier veranlaßt werden, und daraus ergiebt sich die ganz natürliche Beant-

Beantwortung, nämlich diese: ist sowohl u als v eine absolute veränderliche Größe; so muß sowohl $du=1$, als $dv=1$ seyn: ist v allein eine absolute veränderliche Größe, und u eine Function von v; so muß $dv=1$, aber nicht auch $du=1$, seyn: sind aber u, v gewisse Functionen von einer absoluten veränderlichen Größe x; so hat man $dx=1$, aber weder $du=1$, noch $dv=1$. Es erhellet ferner aus (56. §.) daß $dy=K$ der vollständige Ausdruck des Exponenten des Differentialverhältnisses einer Function y ist, bey welcher das Differenzenverhältniß $\Delta y:\Delta x=(K+L\Delta x+M\Delta x^2+\text{etc.}):1$ Statt findet: wegen (55. §.) kann man aber $dy=Kdx$ schreiben, wobey nun $dx=1$ den Exponenten des unveränderlichen Verhältnisses $\Delta x:\Delta x=1:1$, mithin eine abstracte Einheit bedeutet. Solche Einheiten sind demnach auch du, dv, wenn u, v absolute veränderliche Größen sind; ich bediente mich derselben, damit meine Formuln, der äußeren Form nach, mit den gewöhnlichen übereinstimmen mögen: an andere Einheiten aber, wie Hr. Recensent zu denken scheint, habe ich nirgends gedacht, auch nicht denken können. Uebrigens habe ich auch in gegenwärtiger Beylage die Erklärung des Differentialverhältnisses einer Function von zwoen veränderlichen Größen (87. §.) anders eingerichtet, als sie von andern gegeben wird: andere geben vielmehr keine Erklärung; setzen nur die für Functionen von einer veränderlichen Größe geltende voraus; und nehmen dabey, ausdrücklich, oder stillschweigend

an,

an, daß auch die Functionen von zwoen veränderlichen Größen, als solche können betrachtet werden, welche auf eine einzige absolute Größe sich beziehen, welches aber bey einer allgemeinen Untersuchung nicht geschehen sollte (86. §.).

Leipzig
den 14ten April
1798.

Pasquich.

Inhalt.

Inhalt.

Der I. Abschnitt. Beyträge zur Berichtigung und Erweiterung des im ersten Bande enthaltenen Unterrichts.

Allgemeine Sätze, worauf die gesammte analystische Gränzenlehre beruhen soll. Anwendungen davon auf die Erfindung des binomischen Lehrsatzes, der logarithmischen und trigonometrischen Reihen, und derjenigen Werthe der veränderlichen Größen, für welche ihre Functionen am größten oder kleinsten werden. Grundriß einer neuen Exponentialrechnung von gleichem Gebrauch mit der Differentialrechnung. Berichtigung und Erweiterung einiger Sätze die höheren Gleichungen betreffend.

Der II. Abschnitt. Von den ersten Gründen der Differentialrechnung, insofern sie sich als ein Theil der Analysis endlicher Größen betrachten läßt; nebst Erweiterung der im zweyten Bande enthaltenen Integralrechnung.

Allgemeine Gründe der Differentialrechnung. Anwendung auf die Differentiirung gegebener Functionen. Differentialverhältnisse von höhern Ordnungen. Differential- und Differentio-Differentialverhältnisse der Functionen von zwoen veränderlichen Größen. Integrirung der Differential- und Differentio-Differential-Exponenten und Gleichungen.

Der

Der III. Abschnitt. Von den Grundformuln, worauf die Anwendung der Differentialverhältnisse auf die höhere Geometrie und Mechanik beruhet.

Formuln für die Tangenten; Subtangenten; Normallinien; Subnormallinien; den Krümmungshalbmesser; die Rectification krummer Linien; Quadratur der ebenen Flächen; Cubatur runder Körper; und die Quadratur ihrer Oberflächen; alles für rechtwinklichte Coordinaten. Anwendung davon auf die schiefwinklichten, und die von einem Punkte ausgehenden Ordinaten. Von der Bewegung überhaupt, und der unveränderlichen, und gleichförmig beschleunigten insbesondere. Allgemeine Formuln zur Beurtheilung der Bewegung einer körperlichen Masse, welche von einer unveränderlichen oder wie immer veränderlichen Kraft nach geradlinichter Richtung fortgetrieben wird. Von der Bewegung der Körper um gegebene Axen, und dem damit verbundenen Momente der Trägheit. Anwendung auf einfache und zusamengesetzte Penduln.

Der IV. Abschnitt. Von der Exhaustionsmethode der Alten, und der ihr angemessensten Methode die Gründe der Differential- und Integralrechnung festzusetzen.

Bemerkungen den Hauptgrund der Exhaustionsmethode der Alten, und die Ueberzeugung, die er gewährt, betreffend. Seine Wichtigkeit in Verbindung mit der Summirung der Reihen natürlicher Zahlen, ihrer Quadrate und Würfel; auch unbestimmter Potenzen. Uebergang zur Differential- und Integralrechnung, und Bestimmung der vortheilhaftesten Methode, nach welcher die Gründe derselben sich fest setzen lassen.

Ver-

Verzeichniß

der im ersten Bande enthaltenen Druck- und Schreibfehler, nebst Verbesserungen.

Auf der

15 Seite. 20 Zeile statt nnd lese man und.

21 S. 1 Z. von unten, statt verneinenden l. m. verneinten.

26 S. 4 Z. statt $a^{\frac{1}{m}}$ l. m. $\frac{1}{a^m}$.

27 S. 1 Z. statt ${}^{ba}m$ l. m. ba^m.

30 S. 11 Z. statt oder a^m l. m. oder a^{-m}.

33 S. 11 Z. statt beruhen l. m. beruhet.

35 S. 16 Z. statt dem l. m. den.

37 S. 3. Z. statt $\frac{1}{\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}}$ l. m. $\frac{1}{\sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}}}$..

— — 10 Z. statt $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)$ l. m. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r$.

— — 14 Z. statt $\left(a^{\frac{m}{nr}}\right)$ l. m. $\left(a^{\frac{m}{nr}}\right)^r$, und statt $a^{\overline{n}}$ l. m. $a^{\frac{m}{n}}$.

39 S. 4 Z. statt ${}^{a}n\ \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$ l. m. $a^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$..

49 S. 2. 4. 8. Z. von unten, statt $24a^4c^2$ l. m. $24a^4bc$.

73 S. 12. Z. statt aus 8. 16) l. m. aus 8 und x.

79 S. 5 Z. statt $-C$ l. m. $=C$.

— — 6 Z. statt $-Dn$ l. m. $=Dn$.

82 S. 4 Z. von unten, statt AB l. m. A—B.

Auf

Auf der

109 Seite. 18 Zeile statt $\frac{b}{a}$ l. m. $\frac{b}{a}$.

113 S. 19. 20 Z. statt $(n-2)$ten l. m. $(n-1)$ten.

129 S. 5 Z. statt $A.\beta$ l. m. $A.\delta$.

130 S. 2 Z. statt welchen l. m. welche.

131 S. 11 Z. statt 19928 l. m. 15928. und statt 9964 l. m. 7964.

136 S. 13 Z. statt $a\sqrt[n]{b^ncu}$, $g\sqrt[n]{d2nc}$ l. m. $a\sqrt[n]{b^nc}$ und $g\sqrt[n]{d^{2n}c}$.

136 S. 14 Z. statt $g\sqrt[n]{{}^d2n^c}$ l. m. $g\sqrt[n]{d^{2n}c}$.

142 S. 14 Z. statt $= {}^n(a-c)\sqrt{b}$ l. m. $(a-c)\sqrt[n]{b}$.

146 S. 3 Z. von unten, statt $(+a)^2$ l. m. $(+a)^{2n}$.

156 S. 10 Z. statt $(y+x)^3$ l. m. $(y+z)^3$.

158 S. 6 Z. von unten, statt $(a+b)^3-$ l. m. $(a+b)^3=$.

190 S. 3 Z. statt $(Z+X^2.E.$ l. m. $(Z+X)^2.E.$

200 S. 3 Z. von unten, statt $a^{m-2}b$ l. m. $a^{m-2}b^2$.

201 S. 12 Z. statt $1\alpha x$ l. m. $1+\alpha x$.

208 S. 6 Z. statt (n. 8. IV.) l. m. (n. 8. III.).

211 S. 1 Z. von unten, statt 3m l. m. 2m.

212 S. 13 Z. statt $\frac{4\overset{III}{L}\beta}{4}$ l. m. $\frac{4\overset{II}{L}\beta}{4}$.

243 S. 14 Z. statt $\frac{b^2}{a^m}$ l. m. $\frac{b^2}{a}m$.

248 S. 1. 3. 5. Z. statt $-B$ l. m. B.

249 S. 6 Z. von unten, statt α^2 l. m. α^2p.

273 S. 5. Z. statt $c\gamma^3Cy^{n-3}$ l. m. $c^2\gamma^3Cy^{n-3}$.

Auf

Auf der

274 Seite. 12 Zeile statt $-2y^2$ l. m. $-3y^2$.

275 S. 13 Z. statt -40 l. m. -50.

305 S. 4 Z. statt $+\infty^m$ l. m. $=+\infty^m$ für $x=\pm\infty$.

324 S. 17 Z. statt $(p+u)^m$ l. m. $(p+u)^n$.

382 S. n. 4. statt $x=y-$ l. m. $x=y+$.

394 S. 1. 3 Z. von unten, statt $\dfrac{-233}{3\cdot3\cdot3\cdot33}$

l. m. $\dfrac{+7}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}$

395 S. 3. 4 Z. von unten, statt $-\sqrt{x}$ und $-x^{\frac{1}{2}}$ l. m. $+\sqrt{x}$ und $x^{\frac{1}{2}}$.

409 S. 1. 2 Z. von unten, und 410 S. 2. 6. 8 Z.

statt $\dfrac{1000000000{,}200000000}{1020000000{,}106250000}$

l. m. $\dfrac{1000000000000{,}20000000000}{1020000000000{,}10625000000}$

411 S. 7. 8 Z. statt $m=\frac{1}{\mu}$ und $a=c^\mu$ l. m. $m=-\frac{1}{\mu}$, $a=c^\mu$ und $b=-\dfrac{c^\mu b}{c^\mu+b}$.

413 S. 10 Z. statt $=\frac{}{5}$ l. m. $=\frac{7}{5}$.

429 S. 5 Z. statt $\log 2^2 2=\log 2$ l. m. $=\log 2^2=2\log 2$.

437 S. 1 Z. von unten, statt (n. 5.) l. m. (n. 4.)

461 S. 4 Z. von unten, statt $+n2$ l. m. $+2n$.

464 S. 4 Z. stat XVII. Form. l. m. XVIII. Form.

466 S. 6 Z. von unten, statt $(qn-1)$ l. m. $q(n-1)$.

469 S. 6. 8 Z. von unten, statt $L(n-1)+M(n-1)^2+\cdots+R(n-1)^m(A+Bn)$ l. m. $(L(n-1)\cdots+R(n-1)^m)(A+Bn)$.

Auf der

484 Seite. Beym letzten Beyspiele lese man überall 2 . 6 statt 3 . 6.

485 S. 5 Z. von unten, statt 104 l. m. 108.

489 S. II. Formul, statt $+s(q-1)$ l. m. $-s(q-1)$.

503 S. 6 Z. von unten, statt C a und C; a l. m. CM und C; M.

Einige andere Fehler sind im ersten Abschnitte, 39. §. angezeigt worden.

Verzeichniß

der im zweyten Bande enthaltenen Druck und Schreibfehler, nebst Verbesserungen.

Auf der

X. Seite. 10 Zeile, statt der Grundsatz, lese man den Grundsatz. Und 13 Zeile, statt ausdrücklich, l. m. soll man ausdrücklich.

19. S. 6 Z. statt $u = Z - Y$ l. m. $u = Y - Z$.

22 S. 7 Z. statt $y = \frac{1}{2}$ l. m. $y = \frac{1}{x^2}$.

87 S. 1 Z. statt $-\frac{\text{Sin}\, l\, \frac{1}{x}\, dx}{x}$ l. m. $+\frac{\text{Sin}\, l\, \frac{1}{x}\, dx}{x}$

93 S. 9 Z. statt $\frac{1-\varphi^2}{1.2}$ l. m. $1 - \frac{\varphi^2}{1.2}$.

99 S. 4 Z. von unten, statt $z^{\frac{u}{v}} dz$ l. m. $z^{-\frac{u}{v}} dz$.

104 S. 1 Z. statt $\frac{4}{7} x^{-3} dx$ l. m. $\frac{4}{7} x^{-\frac{1}{3}} dx$. und 4. Z. statt $-(1-x^2 dx$ l. m. $-(1-x^2) dx$.

106 S. 5. Z. statt $2.4.\beta^3$. l. m. $2.4.\beta^{\frac{3}{2}}$, und 6 Z. statt β^9 l. m. $\beta^{\frac{9}{2}}$.

Auf der

107 S. 2 Z. von unten, statt γ^6 l. m. γ^5.

108 S. 1 Z. statt $x^{\frac{m2}{2}}$ l. m. $x^{\frac{m-2}{2}}$ und 4 Z. statt $x^{(2r+1)m-2rn-2}$ l. m. $x^{\frac{(2r+1)m-2rn-2}{2}}$

129 S. 1 Z. statt $-\frac{2}{7}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^5$ l. m. $-\frac{2}{7}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^{\frac{7}{2}}$.

147 S. 2 Z. statt $+B\int\frac{dx}{X}$ l. m. $+B\int\frac{x\,dx}{X}$.

—— 2 Z. von unten, statt $8\sqrt{\gamma}$ l. m. $8\gamma\sqrt{\gamma}$.

—— 4 Z. von unten, statt $+\frac{2}{2\sqrt{\gamma}}$ l. m. $+\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}}$.

149 S. 3 Z. statt 2^{3n} l. m. 2^{3n-1}.

157 S. 8 Z. statt $-2x^m$ l. m. $+2x^m$.

—— 2 Z. von unten, statt die schon bekannten Integralien $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$ (36. §.) und $\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (37. §.) l. m. das schon bekannte Integral $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (36. §. §).

163 S. letzte Z. statt $\mp$ l. m. $\pm$.

165 S. 4 Z. statt $x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{+2}}$ l. m. $x\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu+2}}$

170 S. 10 Z. statt $\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{-2}}$ l. m. $\sqrt{(\alpha+\gamma x^2)^{\mu-2}}$.

173 S. 1. 2. 3 Z. von unten, statt $(\alpha+\beta x)^{\mu+2}$, $(\alpha+\beta x)^{\mu}$, $(\alpha+\beta x)^{\mu-2}$ l. m. $(\alpha+\beta x)^{\mu}$, $(\alpha+\beta x)^{\mu-2}$. $(\alpha+\beta x)^{\mu-4}$.

174 S. 1 Z. statt $(\alpha+\beta x)^5$ l. m. $(\alpha+\beta x)^3$.

177 S. 9 Z. statt ist; so erhält man dadurch folgendes Integral 5, l. m. für ein bejahtes sowohl als verneintes α und β zugleich, hingegen der

 zweyte

zweyte Theil $= -\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}} \log \frac{\beta x + \alpha + \sqrt{\beta x}}{\beta x - x} + C$

(39. §. V. Form.) für ein bejahtes β und verneintes α ist; so erhält man dadurch folgende Integralien 5) 6).

178 S. Nach der Formul 5) setze man 6) $\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\beta x - \alpha} =$

$$= \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\beta} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\beta}} \log \frac{\beta x + \alpha + \sqrt{\beta x}}{\beta x - \alpha} + C.$$

179 S. 3 Z. statt $5 . 3 . \alpha^{\frac{\mu - 1}{2}}$ l. m. $\alpha^{\frac{\mu - 1}{2}} \sqrt{(\alpha + \beta x)}$.

180 S. 8. Z. von unten, statt $\mu < n$ l. m. $\mu < n - 2$.

— — 4 Z. von unten, die Einschränkung, doch ist 4) für den Fall, wo v eine, etc. muß wegbleiben.

181 S. 5 Z. von unten, statt $\sqrt{(\alpha + \beta x)}^{-6}$ l. m. $\sqrt{(\alpha + \beta x)}^{\mu - 6}$.

183 S. 2 Z. statt -2β l. m. $-2\beta^2$.

208 S. 4 Z. von unten, statt und eine l. man und meine.

247 S. muß bey 6) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\varphi^n \mathrm{Cos}\varphi^m}$ stehen.

275 S. 14 Z. statt $z \frac{1 - mz}{z}$ l. m. $z + \frac{1 - mz}{z}$..

278 S. statt $\log \frac{1}{\sqrt{(u + \sqrt{(u^2 + v^2)})}}$ l. m. $l \frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{(u + \sqrt{(u^2 + v^2)})}}$..

282 S. statt $+(E + C)z + B$ l. m. $+(E - C)z - B$.

statt $\frac{1}{2}(E - C)$ l. m. $\frac{1}{2}(E + C)$.

Dieses hat im 2ten Zusatz ein falsches Integral veranlaßt; denn für $C = E$ muß nun nach der Aufgabe $C = \log \mu + \log \sqrt{(Fz^2 - B)} + C \int \frac{dz}{Fz^2 - B}$,

die

die mit $(A+Bu+Cv)du-(D+Cu+Fv)dv=0$ zusammenhängende Integralgleichung seyn.

Auf der

288 Seite 3 Zeile von unten, statt $\frac{C}{(u+\sqrt{(1+u^2)})}$ l. m.

$$\frac{C}{(u+\sqrt{(1+u^2)})^n}.$$

289 S. 4. 1 Z. statt der dortigen Integralien für $n=-1$ und $n=1$ setze man folgende:

$$v=\left(C-a\sqrt{(1-u^2)}-2a\,\mathrm{Arc\,Tang}\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right)\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,..$$

$$v=\left(C+a\sqrt{(1-u^2)}-2a\,\mathrm{Arc\,Tang}\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right)\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,..$$

292 S. letzte Z. statt $dy($ l. m. $dy=$.

304 S. 5 Z. von unten, statt $-3181\,.\,2x+243$ l. m. $-318x+243$.

355 S. letzte Zeile. statt ± 2 l. m. ∓ 2.

366 S. 3 Z. von unten, statt $\frac{dP}{dx}=-nx^{n-1}$ l. m.

$$\frac{dP}{dx}=-na^{n-1}.$$

387 S. 3 Z. statt 1rr l. m. in r.

401 S. 2 Z. statt 6 l. m. b.

— — letzte Z. statt $AP=y$ l. m. $AP=x$.

402 S. 7 Z. von unten, statt $:-\frac{\alpha}{\beta}$ l. m. $:\frac{\alpha}{\beta}$.

408 S. 9 Z. statt dy l. m. dg.

412 S. 8 Z. von unten, statt qCf l. m. q′Cf.

413 S. 3 Z. statt $CP=a$ l. m. $CP=u$.

— — 12 Z. statt $Ae-CD$ l. m. $Ae=CD$.

Auf der

413 S. Bey 9 Zusatz muß Fig. 14. vor Augen stehen.

422 S. 16 Z. statt $CQ = u$ l. m. $CF = u$.

423 S. 6 Z. statt $+b^2$ l. m. $-b^2$.

424 S. letzte Z. statt $\frac{1}{2}a$ l. m. $\frac{1}{2}a$.

425 S. im 102. §. soll 13. Figur statt 15 stehen.

439 S. 1. Z. statt Avn l. m. Cvn.

449 S. 11 Z. statt $\frac{2ab}{\sin\beta}$ l. m. $\frac{2ab}{\sin\beta}$).

465 S. letzte Z. statt $-\frac{\beta^2}{\alpha^2}u^2$ l. m. $\frac{\beta^2}{\alpha^2}u^2$.

480 S. 5 Z. statt QMdA l. m. PMdA.

488 S. 6 Z. von unten, statt C l. m. γ.

489 S. 14 Z. statt DPE l. m. DAE.

494 S. 9 Z. von unten, statt 3b l. m. $3b^2$.

495 S. 9 Z. statt $BE = \frac{1}{2}a$ l. m. $DE = \frac{1}{2}b$.

498 S. 9 Z. statt $\sqrt{(2-1)}$ l. m. $\sqrt{2}-1$.

511 S. 14 Z. statt $\sin\frac{2x}{a}$ l. m. $\sin x$.

Bey der 6ten Figur soll am Durchschnittspuncte der Linien VX mit rr″ der Buchstab r′ stehen.

Bey der 16ten Figur soll MT bis m verlängert werden.

Bey der 18ten Figur soll am andern Endpuncte der verlängerten Linie ac der Buchstab b stehen.

Bey der 24ten Figur soll o statt c zwischen d und C stehen.

Der

Der I. Abschnitt.

Beyträge zur Berichtigung und Erweiterung des im ersten Bande enthaltenen Unterrichts.

1. §.

Für alle Größen A, B, C, D, etc. ihre Anzahl $m+1$ mag wie immer groß angenommen werden, muß eine Zahl e möglich seyn, welche $Ae > Be^2 + Ce^3 + De^4 + Ee^5 +$ etc. geben würde.

Beweis. Es wird vorausgesetzt, daß A eine bejahte Größe ist, die übrigen Größen aber alle bejaht, oder einige bejaht, und andere verneint sind: wir wollen indessen annehmen, es seyen alle bejaht.

1. Unläugbar ist es, daß man sich eine Größe Z denken kann, welche größer ist, als jede einzeln genommene Größe A, B, C, D, E, etc.: möglich ist also eine Größe Z, für welche

$$Z(e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + \text{etc.}) > Be^2 + Ce^3 + De^4 + Ee^5 + \text{etc.}$$

seyn würde. Denn es wird, wie überall in der Folge, so auch hier vorausgesetzt, daß, wenn auch die Größen A, B, C, D, etc. allmählig zunehmen, wie sie auf einander folgen, doch noch immer endliche Größen bleiben, solche nämlich, welche noch einer ferneren Zunahme fähig sind.

2. Da aber $m+1$, vermöge der Voraussetzung, die Anzahl der Größen A, B, C, D, E, etc. ist; so kann man den Ausdruck in (1) vollständig so angeben:

$$Z(e^2+e^3+e^4+\ldots+e^m+e^{m+1}) > Be^2+Ce^3+De^4+\text{etc.}$$

3. Es ist ferner, wie dieses aus der Natur der Multiplication erhellet,

$$(e^2+e^3+e^4+\ldots+e^m+e^{m+1})(1-e) =$$

$$= e^2-e^{m+2} = e^2(1-e^m): \text{ also ist}$$

$$e^2+e^3+\ldots+e^m+e^{m+1} = \frac{e^2(1-e^m)}{1-e}.$$

Demnach erhält man aus (2)

$$\frac{Ze^2(1-e^m)}{1-e} > Be^2+Ce^3+De^4+Ee^5+\text{etc.}$$

4. Nun ist, aus bekannten Gründen, für die Größen A, A+Z gewiß eine ganze Zahl n möglich, wofür ein ntel von A+Z kleiner wäre als A, nämlich $(A+Z)\frac{1}{n} < A$: möglich ist also eine Zahl $e = \frac{1}{n}$, welche

$$(A+Z)e < A, \text{ daher } Ze < A(1-e)$$

mithin $\frac{Ze^2}{1-e} < Ae$ geben würde.

5. Endlich ist $1-e^m < 1$, folglich $Ze^2(1-e^m) < Ze^2$: also auch

$$\frac{Ze^2(1-e^m)}{1-e} < \frac{Ze^2}{1-e}.$$

Wegen (4) ist demnach

$$\frac{Ze^2(1-e^m)}{1-e} < Ae, \text{ und nun wegen (3)}$$

$$Ae > Be^2+Ce^3+De^4+Ee^5+\text{etc.}$$

6. Wenn

6. Wenn nicht alle Größen B, C, D, E. F, etc. bejaht sind, so werden einige unter den Producten Be^2, Ce^3, De^4, Ee^5, Fe^6 etc. bejaht, und die andern verneint seyn. Sey S die Summe aller bejahten, und — s die Summe aller verneinten, mithin S — s die Summe aller bejahten und verneinten Producte. Nun ist allemal $S > S - s$, und es muß, vermöge des für bejahte Producte bereits erwiesenen Lehrsatzes, eine Zahl e möglich seyn, welche $Ae > S$ geben würde: für dieselbe Zahl wäre also auch $Ae > S - s$.

2. §.

Für alle Größen A, B, C, D, etc., und für jede wie immer kleine gleichartige Größe μ muß eine Zahl möglich seyn, für welche die Summe der Producte aus verschiedenen Potenzen derselben Zahl in die einzelnen Größen A, B, C, D etc. kleiner ist, als die Größe μ.

Beweis. 1. Wir wollen indessen voraussetzen, daß alle Größen A, B, C, D, etc. bejaht sind, und bey dieser Voraussetzung darthun, es sey wirklich eine Zahl e, oder k möglich, welche $Ae + Be^2 + Ce^3 +$ etc. $< \mu$, oder $Ak + Bk^2 + Ck^3 +$ etc. $< \mu$ geben würde.

2. Es erhellet nämlich aus (1. §.), daß eine Zahl e möglich ist, welche $2\,Ae > Ae + Be^2 + Ce^3 + De^4 +$ etc. gäbe.

3. Es mag ferner μ eine wie immer kleine, und 2 A eine andere wie immer große Größe seyn; so muß doch, aus bekannten Gründen, eine ganze Zahl n möglich seyn,

 wofür

wofür ein ntel von 2 A kleiner als μ wäre, nämlich $2\,A.\frac{1}{n} < \mu$: es ist daher eine Zahl $k=\frac{1}{n}$ möglich, welche $2\,Ak < \mu$ geben würde.

4. Nun aber ist in (2) (3) $e=k$, oder $e < k$, oder $e > k$. Ist wirklich $e=k$; so ist auch $2\,Ae=2\,Ak$, und $Ae+Be^2+Ce^3+De^4+\text{etc.}=Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+\text{etc.}$: also wegen (3) (2) ist $Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+\text{etc.} < \mu$, der Behauptung (1) gemäß.

Nimmt man aber an, es sey $e < k$; so ist $2\,Ae < 2\,Ak$: also $2\,Ae < \mu$, wegen (3), und nun $Ae+Be^2+Ce^3+De^4+\text{etc.} < \mu$ in (2), zum Beweise von (1).

Ist endlich $e > k$; so ist auch $Be+Ce^2+De^3+\text{etc.} > Bk+Ck^2+Dk^3+\text{etc.}$: mithin, wegen $A > Be+Ce^2+De^3+\text{etc.}$ in (2), auch $A > Bk+Ck^2+Dk^3+\text{etc.}$ folglich $2\,Ak \geq Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+\text{etc.}$, und nun $Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+\text{etc.} < \mu$, wegen (3), welches der Beweis von (1) ist.

5. Seyen ferner einige unter den Größen A, B, C, D, etc. bejaht, und die andern verneint. Die Summe der Producte aus den bejahten Größen in gewisse Potenzen einer Zahl v sey S, und $-s$ die Summe der Producte aus den verneinten Größen in andere Potenzen der Zahl v, mithin sey $S-s$ die Summe der Producte aus allen bejahten und verneinten Größen in verschiedene Potenzen der Zahl v. Weil, vermöge des vorhergehenden Beweises, gewiß eine Zahl v möglich ist, wofür $S < \mu$ seyn würde, und allemal $S-s < S$ ist; so wäre für dieselbe Zahl auch $S-s < \mu$.

3. §.

3. §.

Wenn z eine veränderliche Größe, und p, q, r, s, etc. beständige von z unabhängige Größen sind; so muß ein Werth von z möglich seyn, für welchen $pz > qz^2 + rz^3 + sz^4 + etc.$, und $pz + qz^2 + rz^3 + sz^4 + etc. < \mu$ für jede wie immer kleine Größe μ seyn würde.

Beweis. Sey α was immer für eine beständige, mit z gleichartige Größe (etwa α eine gerade Linie von bestimmter Größe, und z eine ebenfalls gerade Linie von veränderlicher Länge). Da man nun der veränderlichen Größe z jeden Werth beylegen kann; so wird man $z = \alpha e$ für jede angenommene Zahl $e = \frac{1}{n}$ setzen können: wenn also p, q, r, s, etc. was immer für Größen sind, doch alle unabhängig von z; so wird eine Zahl $e = \frac{1}{n}$ möglich, mithin auch ein Werth αe von z möglich seyn, wofür $p\alpha . e > q\alpha^2 . e^2 + r\alpha^3 . e^3 + s\alpha^4 . e^4 + etc.$, und $p\alpha . e + q\alpha^2 . e^2 + r\alpha^3 . e^3 + s\alpha^4 . e^4 + etc. < \mu$ (1. 2. §.), folglich auch $pz > qz^2 + rz^3 + sz^4 + etc.$, und $pz + qz^2 + rz^3 + sz^4 + etc. < \mu$ seyn würde.

4. §.

Wenn die Coefficienten Q, M, N, O, P, etc. von der veränderlichen Größe z nicht abhängen, und die Function $Q + Mz + Nz^2 + Oz^3 + Pz^4 + etc.$ für jeden möglichen Werth von z gleich Null ist; so muß auch $Q = 0$, und $M + Nz + Oz^2 + Pz^3 + etc. = 0$ seyn.

Beweis. Man kann diesen Satz als eine unmittelbare Folge aus (3. §.) betrachten.

1. Denn es kann zwar die veränderliche Größe z verschiedentlich zu- oder abnehmen, wobey aber Q, weil es

von z nicht abhängt, als beständig muß betrachtet werden: daher kann man annehmen, Q habe irgend einen bestimmten Werth, wenn nicht $Q=0$ ist.

2. Da also $Q=-(Mz+Nz^2+Oz^3+Pz^4+\text{etc.})$ seyn muß, sobald $Q+Mz+Nz^2+Oz^3+Pz^4+\text{etc.}=0$ ist; so wird auch $Mz+Nz^2+Oz^3+Pz^4+\text{etc.}$ entweder gleich Null seyn, oder irgend einen bestimmten, von z unabhängigen Werth haben, wegen (1): dieses kann aber, wegen (3. §.), nicht Statt finden; daher muß jenes angenommen, nämlich $Mz+Nz^2+Oz^3+Pz^4+\text{etc.}=0$, und nun auch $M+Nz+Oz^2+Pz^3+\text{etc.}=0$ gesetzt werden.

5. §.

Sind demnach bey einer analytischen Untersuchung gewisse, von der veränderlichen Größe z unabhängige Größen A, B, C, D, - - - a, b, c, d, - - - X, Z dergestalt beschaffen, daß für sie und jeden möglichen Werth von z

$$Z=X+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}$$

oder

$$Z+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.}=X+az+bz^2+cz^3+\text{etc.}$$

ist; so müssen die Größen Z, X einander gleich seyn. Denn es ist bey dieser Voraussetzung

$$Z-X-Az-Bz^2-Cz^3-\text{etc.}=0$$

oder

$$Z-X+\left.\begin{matrix}A\\-a\end{matrix}\right)z+\left.\begin{matrix}B\\-b\end{matrix}\right)z^2+\left.\begin{matrix}C\\-c\end{matrix}\right)z^3+\left.\begin{matrix}\text{etc.}\\-\text{etc.}\end{matrix}\right)=0:$$

also ist nach (4. §.) $Z-X=0$, daher $Z=X$.

6. §.

Wenn die Coefficienten A, B, C, D, etc. von der veränderlichen Größe z nicht abhängen, und eine

Fun-

Function von ihr, wie $A+Bz+Cz^2+Dz^3+ \dots + Pz^{r-1}+Qz^r+Rz^{r+1}+ \dots +Xz^n+$ etc. für jeden möglichen Werth von z gleich Null ist; so müssen alle Coefficienten A, B, C, D, - - - X, einzeln genommen gleich Null seyn.

Beweis. 1. Es ist $A=0$, und $B+Cz+Dz^2+ \dots Xz^{n-1}=0$ (4. §.); und nun auch $B=0$, $C+Dz+ \dots +Xz^{n-2}=0$ (4. §.); daher auch $C=0$ (4. §.)

2. Nimmt man ferner an, daß einige der ersten Coefficienten, etwa A, B, C, - - - P, wirklich gleich Null sind; so wird bey $A+Bz+Cz^2+ \dots +Pz^{r-1}+Qz^r+Rz^{r+1}+ \dots +Xz^n+$ etc. $=0$, auch $Qz^r+Rz^{r+1}+ \dots +Xz^n+$ etc. $=0$, mithin $Q+Rz+ \dots +Xz^{n-r}=0$, Folglich $Q=0$ (4. §.) seyn müssen.

Aus (1) (2) erhellet demnach die Richtigkeit des Lehrsatzes ganz allgemein nach (I. Band. 54. §.).

7. §.

Wenn demnach zwo Functionen $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ etc. $a+bz+cz^2+dz^3+$ etc. für jeden möglichen Werth der veränderlichen Größe z einander gleich seyn sollen; so müssen auch die zu gleichen Potenzen von z gehörigen Coefficienten, A und a, B und b, C und c, D und d, etc. einander gleich seyn: denn aus $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ etc. $=a+bz+cz^2+dz^3+$ etc. folgt $A-a+(B-b)z+(C-c)z^2+(D-d)z^3+$ etc. $=0$; daher $A-a=0$, $B-b=0$, $C-c=0$, $D-d=0$, etc. und nun $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, etc.

8. §.

Wenn für gewisse bestimmte Werthe von Z, X zwo Größen U, V dergestalt beschaffen sind, daß jede einzeln genommen kleiner werden kann, als jede denkbare wie immer kleine gleichartige Größe; wenn ferner für alle mögliche Werthe der Größen U, V sowohl $Z > X \pm U$, als $Z < X \pm V$ ist; so müssen die Größen Z, X einander gleich seyn.

Beweis. Zuerst müssen wir untersuchen, ob alle hier angegebenen Bedingungen möglich sind, ob es nicht vielmehr darunter einige unmögliche giebt.

Nimmt man $Z < X - V$ an; so ist $Z < X$, und so auch $Z < X + U$: die Bedingungen $Z > X + U$ und $Z < X - V$ können also nicht zugleich bestehen.

Wäre ferner $Z > X + U$; so wäre auch $Z > X$: zwischen den bestimmten Größen Z, X müßte es also eine bestimmte Differenz $Z - X$ geben. Da aber, vermöge der Voraussetzung, V kleiner werden kann, als jede denkbare, wie immer kleine Größe; so könnte $V < Z - X$ werden, mithin $Z > X + V$. Man kann demnach nicht annehmen, daß die Bedingungen $Z > X + U$ und $Z < X + V$ für alle mögliche Werthe von U, V zugleich bestehen.

Hieraus erhellet, daß beym aufgestellten Lehrsatze nur folgende Bedingungen Statt haben können.

I. $Z > X - U$ und zugleich $Z < X + V$.

II. $Z > X - U$ und zugleich $Z < X - V$.

Daß nun weder die Bedingungen in I.) noch die in II.) zugleich bestehen können, wenn nicht Z, X gleiche Größen sind, erhellet so:

Sey

Sey $Z > X$; so ist schon deswegen die Bedingung $Z < X - V$ in II.) unmöglich. Es muß ferner, wenn $Z > X$ ist, eine bestimmte Differenz $Z - X$ da seyn, und, vermöge der Voraussetzung, ein Werth von V, wofür $V < Z - X$ seyn würde: also kann, wenn $Z > X$ ist, die Bedingung $Z < X + V$ in I.) nicht für jeden möglichen Werth von V bestehen.

Setzt man aber $Z < X$; so muß es eine bestimmte Differenz $X - Z$, und, vermöge der Voraussetzung, nun einen Werth von U geben, wofür $U < X - Z$ wäre: also nicht allemal $Z > X - U$, wie dieses nach I.) II.) geschehen soll.

9. §.

Wenn die Größen Z, X, f, g, h, - - - α, β, γ, etc. eigene, von der veränderlichen Größe z unabhängige Werthe haben, und man findet, daß für alle mögliche Werthe der veränderlichen Größe z sowohl

$$Z > X + fz + gz^2 + hz^3 + \text{etc.}$$

als $$Z < X + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.}$$

ist; so müssen die Größen Z, X einander gleich seyn (8. 3. §.).

10. §.

Aus diesen wenigen Sätzen läßt sich die gesammte analytische Gränzenlehre ableiten. Sie kommen schon in beyden Bänden des Unterrichts in der mathematischen Analysis zerstreut vor: hier habe ich sie beysammen in ihrem natürlichen Zusammenhange aufzustellen, und die Gründe, worauf sie beruhen, bündiger zu erörtern gesucht, als es bey

jenem Unterrichte geschehen ist. Nun will ich einige Beyspiele beybringen, welche den Gebrauch, den man davon bey den wichtigsten analytischen Untersuchungen machen kann, genugsam erläutern werden: Folgende Abschnitte werden neue Beweise von der ausgedehnten Brauchbarkeit derselben Sätze enthalten.

Bey Allen Untersuchungen, wovon hier die Rede ist, kömmt folgender allgemeine Satz vor:

Wenn a, b, c, d, etc. von z unabhängige Größen sind, und r eine ganze bejahte Zahl bedeutet; so müssen andere von z unabhängige Größen α, β, γ, etc. möglich seyn, wofür die rte Potenz von $a+bz+cz^2+dz^3+$ etc. einer Reihe von der Form $a^r+ra^{r-1}bz+\alpha z^2+\beta z^3+$ etc. gleich ist.

Mehr braucht man hier von einer solchen Potenz nicht zu wissen: von der Möglichkeit aber der Größen α, β, γ, etc. kann man sich, unabhängig vom binomischen Lehrsatze, aus folgenden Gründen überzeugen.

1. Wenn M, N, O, - - - p, q, r, etc. von z unabhängige Größen sind; so muß, wie es aus der Natur der Multiplication erhellet, das Product aus $M+Nz+Oz^2+$ etc. in $p+qz+rz^2+$ etc., für gewisse von z unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. einer Reihe von der Form $Mp+(Mq+Np)z+\alpha z^2+\beta z^3+\gamma z^4+$ etc. gleich seyn.

2. Daher, für $Z=a+bz+cz^2+$ etc., giebt es eine Reihe $Z^2=Z.Z=a^2+2abz+\alpha z^2+\beta z^3+$ etc. wegen (1).

3. Und, wenn für irgend eine ganze bejahte Zahl n man $Z^n=a^n+na^{n-1}bz+uz^2+vz^3+$ etc. setzt; so ist

Z^{n+1}

$Z^{n+1} = Z^n . Z = a^{n+1} + (n+1) a^n bz + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4$ + etc. wegen (1).

Der Lehrsatz gilt also wirklich für die 2te Potenz von Z nach (2); und, wenn er von irgend einer nten Potenz wahr wäre, so müßte er auch für die (n + 1)te gelten, nach (3): er gilt also für jede mögliche rte Potenz, wenn nur r eine ganze bejahte Zahl ist. (I. Band. 54. §.)

11. §.

Will man nun die bisherige Theorie auf die Erfindung des binomischen Lehrsatzes anwenden, für den man im 8ten Abschnitte des ersten Bandes eine eigene Erfindungsmethode wird gelesen haben; so nehme man an, weil doch alles auf die Entwickelung der Potenz $(1 + x)^m$ für einen unbestimmten Exponenten m ankömmt, es seyen

1. die Coefficienten A, B, C, D, etc. dergestalt beschaffen, daß für sie, und jeden möglichen Werth von x folgende Gleichung Statt findet:

$$(1 + x)^m = 1 + mx + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \dots + Px^{r-1} + Qx^r + Rx^{r+1} + \text{etc.} = Z.$$

Für eine bejahte ganze Zahl m muß wirklich $(1 + x)^m$ einer Reihe von dieser Form gleich seyn (10. §.); und nun soll entschieden werden, ob es nicht auch für andere Zahlen m eine solche Reihe giebt, und wie bey ihr die Coefficienten A, B, C, etc. beschaffen sind.

2. Wenn die Gleichung in (1) ihre Richtigkeit haben soll; so muß für jeden möglichen aliquoten Theil $e = \frac{1}{n} x$ von x auch folgende Gleichung bestehen.

(1 + x

$$(1+x+e)^m = 1+m(x+e)+A(x+e)^2+B(x+e)^3+C(x+e)^4 + P(x+e)^{r-1}+Q(x+e)^r+R(x+e)^{r+1}+\text{etc.} = X.$$

3. Nun aber müssen gewisse von e unabhängige Coefficienten K, L, M, etc. möglich seyn, für welche die Gleichung in (2) sich in folgende verwandeln lassen würde (10. §.).

$$(1+x+e)^m = \left.\begin{array}{l} 1+mx+Ax^2+ \cdots +Rx^{r+1} \\ +(m+2Ax+3Bx^2+4Cx^3+ \cdots \\ +rQx^{r-1}+(r+1)Rx^r+\text{etc.})e \\ +Ke^2+Le^3+Me^4+\text{etc.} \end{array}\right\} = X$$

4. Demnach erhielte man aus (1) (3) folgende Gleichung.

$$X-Z=(m+2Ax+3Bx^2+4Cx^3+\cdots+rQx^{r-1}+(r+1)Rx^r+\text{etc.})e + Ke^2+Le^3+Me^4+\text{etc.}$$

5. Ferner wäre in 1) 2)

$$\frac{X}{Z} = \frac{(1+x+e)^m}{(1+x)^m} = \left(1+\frac{e}{1+x}\right)^m.$$

6. Daher, weil die Gleichung in (1) für jeden möglichen Werth von x gelten soll, wäre in (5) auch

$$\frac{X}{Z} = 1+\frac{m}{1+x}e+\frac{A}{(1+x)^2}e^2+\frac{B}{(1+x)^3}e^3+\cdots + \frac{R}{(1+x)^{r+1}}e^{r+1}+\text{etc.}$$

Und hieraus fände man

$$X-Z = \frac{mZ}{1+x}e+\frac{AZ}{(1+x)^2}e^2+\frac{BZ}{(1+x)^3}e^3+\cdots + \frac{RZ}{(1+x)^{r+1}}e^{r+1}+\text{etc.}$$

7. Die Reihen in (4) (6) müssen einander gleich seyn; dieselben dividirt durch e geben also folgende Gleichung:

$$m + 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + \cdots + rQx^{r-1} + Ke + Le^2 + Me^3 + \text{etc.}$$
$$= \frac{mZ}{1+x} + \frac{AZ}{(1+x)^2}e + \frac{BZ}{(1+x)^3}e^2 + \cdots + \frac{RZ}{(1+x)^{r+1}}e^r$$
$$+ \text{etc.}$$

8. Und diese Gleichung muß bey jedem Werthe x und für jeden möglichen aliquoten Theil e von x nach (2) gelten: also ist bey ihr nach (5. §.)

$$m + 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + \cdots + rQx^{r-1} = \frac{mZ}{1+x}.$$

Und hieraus findet man nach 1)

$$(m + 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + \cdots + rQx^{r-1})(1+x) = mZ.$$

oder

$$\begin{array}{llllll} m + 2A)x & + 3B)x^2 & + 4C)x^3 & + \cdots & + (r+1)R)x^r & = \\ \quad + m) & + 2A) & + 3B) & + \cdots & + rQ \quad) & \end{array}$$
$$= m + m^2x + mAx^2 + mBx^3 + \cdots + mQx^r.$$

Demnach ist nach (7. §.)

$$\begin{array}{l|l} m = m & m = m \\ 2A + m = m^2 & A = \frac{m(m-1)}{2} \\ 3B + 2A = mA & B = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} \\ 4C + 3B = mB & C = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ \vdots & \vdots \\ (r+1)R + rQ = mQ & R = \frac{m-r}{r+1} \cdot Q \end{array}$$

Und eben diese Coefficienten sind im 8ten Abschnitte des ersten Bandes auf einem anderen Wege gefunden worden.

Uebri-

Uebrigens ist klar, daß diese Coefficienten für jede Zahl m gelten müssen, für welche der Ausdruck von $\frac{X}{Z}$ in (5) gilt: da also dieser nach der Anleitung der Elementarmathematik für jede rationale und irrationale Zahl m gelten soll; so müssen auch dieselben Coefficienten für solche Zahlen gelten. Daher kann man den binomischen Lehrsatz für alle rationale und irrationale Exponenten als erwiesen voraussetzen.

12. §.

Nun will ich die vorhergehende Theorie auf die Erfindung logarithmischer Reihen anwenden, und bey dieser Gelegenheit einige Sätze im ersten Bande berichtigen.

1. Seyen die Coefficienten A, B, C, D, etc. dergestalt beschaffen, daß für sie und jeden möglichen Werth von x folgende Gleichung Statt finden möge:

$$y = \mathrm{Log.}(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \cdots\cdots + Px^r + Qx^{r+1} + \text{etc.}$$

2. Mithin, wenn e was immer für einen aliquoten Theil von x bedeutet, sey auch

$$Y = L(1+x+e) = A(x+e) + B(x+e)^2 + C(x+e)^3 + D.(x+e)^4 + \cdots + P(x+e)^r + Q(x+e)^{r+1} + \text{etc.}$$

3. Daher müssen gewisse von e unabhängige Coefficienten K, L, M, etc. möglich seyn, für welche die Gleichung (2) nach (10. §.) in folgende übergehen würde.

$$Y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots + Qx^{r+1} + \text{etc.}$$
$$+ (A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \cdots\cdots + rPx^{r-1} + (r+1)Qx^r + \text{etc.})e$$
$$+ Ke^2 + Le^3 + Me^4 + \text{etc.}$$

4. In (1) (3) müßte also seyn:

$$Y-y=(A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + rPx^{r-1}+(r+1)Qx^r+\text{etc.})e$$
$$+Ke^2+Le^3+Me^4+\text{etc.}$$

5. Es ist ferner in (1) (2) nach (I. Band. 135. §.)

$$Y-y=L(1+x+e)-L(1+x)=\text{Log}\left(1+\frac{e}{1+x}\right).$$

Da also die Gleichung in (1) für jeden möglichen Werth von x gelten soll; so wird man daraus für $\frac{e}{1+x}$ statt x genommen, folgende Gleichung erhalten:

$$Y-y=\frac{Ae}{1+x}+\frac{Be^2}{(1+x)^2}+\frac{Ce^3}{(1+x)^3}+\cdot\cdot+\frac{Qe^{r+1}}{(1+x)^{r+1}}+\text{etc.}$$

6. Die Reihen in (4) (5) sind demnach einander gleich: dividirt man also beyde durch e; so geben sie

$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdot\cdot\cdot+rPx^{r-1}+(r+1)Qx^r+\text{etc.}$$
$$+Ke+Le^2+Me^3+\text{etc.}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{(1+x)^2}e+\frac{C}{(1+x)^3}e^2$$
$$+\frac{D}{(1+x)^4}e^3+\text{etc.}$$

7. Und diese Gleichung soll, wegen (2) bey jedem Werthe von x und für jeden aliquoten Theil e von x gelten: bey ihr muß also seyn (5. §.)

$$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdot\cdot\cdot+rPx^{r-1}+(r+1)Qx^r=\frac{A}{1+x},$$

und nun

$$\begin{array}{lllllll} 2B)x & +3C)x^2 & +4D)x^3 & + & \cdot\cdot & + & (r+1)Q)x^r \\ +A) & +2B) & +3C) & + & \cdot\cdot\cdot\cdot & + & rP\;)=0. \end{array}$$

Daraus

Daraus erhält man nach (6. §.).

$$\begin{array}{l|l} 2B + A = 0 & B = -\tfrac{1}{2}A \\ 3C + 2B = 0 & C = +\tfrac{1}{3}A \\ 4D + 3C = 0 & D = -\tfrac{1}{4}A \\ \vdots & \vdots \\ (r+1)Q + rP = 0 & Q = -P\frac{r}{r+1} \end{array}$$

Für diese Werthe von A, B, C, etc. wird also die Gleichung in (1) allemahl Statt finden: sie giebt nämlich

$$L(1+x) = A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \text{etc.}\right).$$

13. §.

Für $-x$ statt x in (12. §.) erhält man $L(1-x)$, wie folgt:

$$L(1-x) = -A\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \text{etc.}\right).$$

14. §.

Ziehet man die Gleichung in (13. §.) von der Gleichung in (12. §.) ab, weil nach (I. Band. 135. §.) $L(1+x) - L(1-x) = L\frac{1+x}{1-x}$ ist; so findet man

$$L\frac{1+x}{1-x} = 2A\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \text{etc.}\right).$$

15. §.

Das Bisherige gilt für jedes mögliche logarithmische System, und es kann $\frac{1+x}{1-x}$ jeder Zahl gleich gesetzt werden: bedeutet also b die Grundzahl des Systems, und setzt man $\frac{1+x}{1-x}=b$; so ist $L\frac{1+x}{1-x}=Lb=1$ (I. Band. 134. §. 1. Zusatz.) und man findet $x=\frac{b-1}{b+1}$. Die Gleichung im (14. §.) giebt daher:

$$1=2A\left(\frac{b-1}{b+1}+\frac{(b-1)^3}{3(b+1)^3}+\frac{(b-1)^5}{5(b+1)^5}+\cdots+\frac{(b-1)^{2n+1}}{(2n+1)(b+1)^{2n+1}}\right);$$

mithin ist

$$A=\frac{1}{2\left(\frac{b-1}{b+1}+\frac{(b-1)^3}{3(b+1)^3}+\frac{(b-1)^5}{5(b+1)^5}+\cdots+\frac{(b-1)^{2n+1}}{(2n+1)(b+1)^{2n+1}}\right)}.$$

16. §.

Auf eine ähnliche Art kann man auch die Zahl z finden, welche einem Logarithmen y zugehört.

1. Man nehme nämlich an, für jeden Werth von y sey:

$$z=1+ay+by^2+cy^3+\cdots+py^r+qy^{r+1}+\text{etc.}$$

2. Da nun in jedem Systeme verschiedene Logarithmen mit verschiedenen Zahlen in Verbindung stehen; so muß, wenn e was immer für einen aliquoten Theil von z bedeutet, der Zahl z+e ein Logarithme y+ω zugehören, und dafür ist nach (1):

$$z+e=1+a(y+\omega)+b(y+\omega)^2+c(y+\omega)^3+d(y+\omega)^4$$
$$+ \cdots + p(y+\omega)^r+q(y+\omega)^{r+1}+ \text{etc.}$$

3. Da aber $y=Lz$ und $y+\omega=L(z+e)$ war, mithin $\omega=L(z+e)-Lz=l\left(1+\frac{e}{z}\right)$ seyn muß (I. Band. 135. §.); so hat man nach (12. §.)

$$\omega=\frac{Ae}{z}-\frac{Ae^2}{2z^2}+\frac{Ae^3}{3z^3}-\frac{Ae^4}{4z^4}+ \text{etc.}$$

und bey diesem Ausdrucke enthält jedes folgende Glied eine höhere Potenz von e.

4. Wegen (3) müssen daher gewisse, von e unabhängige Coefficienten k, l, m, n, etc. möglich seyn, für welche jede Potenz $(y+\omega)^r$ einer Reihe von der Form $y^r+\frac{rAe}{z}y^{r-1}+ke^2+le^3+me^4+$ etc. gleich ist (10. §.): also müssen andere von e unabhängige Coefficienten α, β, γ, δ, etc, möglich seyn, für welche die Gleichung in (2) sich in folgende würde verwandeln lassen:

$$z+e=1+ay+by^2+cy^3+ \cdots +qy^{r+1}+ \text{etc.}$$
$$+\left(\frac{aA}{z}+\frac{2bA}{z}y+\frac{3cA}{z}y^2+\frac{4dA}{z}y^3+ \cdots \right.$$
$$\left.+\frac{rpA}{z}y^{r-1}+\frac{(r+1)qA}{z}y^r+ \text{etc.}\right)e$$
$$+\alpha e^2+\beta e^3+\gamma e^4+ \text{etc.}$$

Wegen (1) wäre demnach

$$e=\left(\frac{aA}{z}+\frac{2bA}{z}y+\frac{3cA}{z}y^2+\frac{4dA}{z}y^3+ \cdots \right.$$
$$\left.+\frac{rpA}{z}y^{r-1}+\frac{(r+1)qA}{z}y^r+ \text{etc.}\right)e$$
$$+\alpha e^2+\beta e^3+\gamma e^4+ \text{etc.};$$

und

und nun

$$z = aA + 2bAy + 3cAy^2 + 4dAy^3 + \ldots + rpAy^{r-1} + (r+1)qAy^r + \text{etc.} + \alpha ze + \beta ze^2 + \gamma ze^3 + \text{etc.}$$

5. Die Reihen in (1) (4) müssen für jeden aliquoten Theil e von z in (2) einander gleich seyn: nach (5. §.) erhält man also aus (1)(4) folgende Gleichung:

$$1 + ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \ldots + py^r + qy^{r+1} + \text{etc.} = aA + 2bAy + 3cAy^2 + 4dAy^3 + \ldots + rpAy^{r-1} + (r+1)qAy^r + \text{etc.}$$

Daher hat man nach (7. §.)

$aA = 1$	$a = \frac{1}{A}$
$2bA = a$	$b = \frac{1}{2.A^2}$
$3cA = b$	$c = \frac{1}{2.3.A^3}$
$4dA = c$	$d = \frac{1}{2.3.4.A^4}$
$\vdots$	$\vdots$
$(r+1)qA = p$	$q = p \cdot \frac{1}{(r+1)A}$.

Für diese Werthe wird also die Gleichung in (1) allemahl bestehen, oder es wird seyn:

$$z = 1 + \frac{y}{A} + \frac{y^2}{2A^2} + \frac{y^3}{2.3.A^3} + \frac{y^4}{2.3.4.A^4} + \ldots + \frac{y^{r+1}}{2.3\ldots(r+1)A^{r+1}}.$$

Nämlich:

$$z = 1 + \frac{lz}{A} + \frac{(lz)^2}{2A^2} + \frac{(lz)^3}{2.3.A^3} + \frac{(lz)^4}{2.3.4.A^4} + \ldots + \frac{(lz)^{r+1}}{2.3.4\ldots(r+1)A^{r+1}}.$$

17. §.

Wenn b die Grundzahl des logarithmischen Systems (in 16. §.) bedeutet, und man $z=b$ setzt; so ist $lz=lb=1$ (I. Band. 134. §. 1. Zusatz): also ist in (16. §.) die Grundzahl:

$$b=1+\frac{1}{A}+\frac{1}{2A^2}+\frac{1}{2.3A^3}+\frac{1}{2.3.4A^4}+\frac{1}{2.3.4.5A^5}+\text{etc.}$$

18. §.

Bey jedem logarithmischen Systeme giebt es demnach, außer seiner Grundzahl b, noch eine durch dieselbe Grundzahl vollkommen bestimmte Zahl A (15. §.), von welcher der Logarithme jeder Zahl $1+x$ dergestalt abhängt, daß man, um ihn zu erhalten, nur die von x abhängige Reihe $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\text{etc.}=S$ mit eben der Zahl A zu multipliciren braucht. Diese Zahl A heißt der **Modul** des logarithmischen Systems, und darnach wird jedes System ein **künstliches** System genannt, wenn sein Modul größer ist, oder kleiner als A; hingegen wird es das natürliche System genannt, wenn der Modul $=1$ ist. Es ist aber unter allen künstlichen Systemen das der gemeinen Logarithmen, welches auf der Grundzahl 10 beruhet, am merkwürdigsten.

19. §.

Für die natürlichen Logarithmen hat man demnach in (18. 16. 14. 13. 12. §.) folgende Reihen:

$$z=1+lz+\frac{(lz)^2}{2}+\frac{(lz)^3}{2.3}+\frac{(lz)^4}{2.3.4}+\cdots+\frac{(lz)^n}{2.3\ldots n}.$$

$$L\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right).$$

L(1−x)

$$L(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right).$$

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^n}{n}.$$

20. §.

Bedeutet $b=e$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen; so ist nach (18. 17. §.)

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Mithin $e = 2,71828182$ etc.

21. §.

Und für $b=10$ erhält man den Modul der gemeinen Logarithmen nach (18. 15. §.) wie folgt:

$$A = \frac{1}{2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} + \frac{9^7}{7.11^7} + \text{etc.}\right)}.$$

Daher $A = 0,43429448$ etc.

Und $\frac{1}{A} = 2,30258509$ etc.

22. §.

Wenn Y, y die Logarithmen sind, welche einer Zahl $u = 1+x$ bey zweyen Systemen zugehören, deren Moduln A, a seyn mögen; so ist $Y = AS$, und $y = aS$ (18. §.): also $Y : y = A : a$, das heißt: die bey zweyen Systemen einer jeden Zahl u zugehörigen Logarithmen verhalten sich gegen einander gerade wie die Moduln derselben Systeme.

23. §.

Wenn demnach die Bezeichnungen $\mathrm{ln.u}$, $\mathrm{lg.u}$ den natürlichen und gemeinen Logarithmen einer Zahl u bedeuten, und A den Modul der gemeinen Logarithmen ausdrückt; so ist nach (18. 22. §.)

$$\mathrm{ln.u} : \mathrm{lg.u} = 1 : A, \text{ daher}$$

$$\mathrm{ln.u} = \mathrm{lg.u} \times \frac{1}{A}, \text{ und } \mathrm{lg.u} = A \times \mathrm{ln.u}.$$

Aus den gemeinen Logarithmen gewisser Zahlen wird man demnach ihre natürlichen Logarithmen ableiten, wenn man jene durch ihren Modul A dividirt, oder mit dem Bruche $\frac{1}{A}$ multiplicirt (21. §.): aus den natürlichen Logarithmen gewisser Zahlen erhält man hingegen die gemeinen Logarithmen derselben Zahlen, wenn man jene mit dem Modul A der gemeinen Logarithmen (21. §.) multiplicirt.

24. §.

Und wenn man überhaupt durch $\mathrm{lk.u}$ den Logarithmen einer Zahl u in was immer für einem künstlichen Systeme verstehet, dessen Modul A seyn mag; so ist, wie in (23. §.)

$$\mathrm{ln.u} : \mathrm{lk.u} = 1 : A.$$

Wäre nun u = e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen; so hätte man $\mathrm{ln.u} = \mathrm{ln.e} = 1$ (I. Band. 134. §. 1. Zus.) mithin $1 : \mathrm{lk.e} = 1 : A$, und nun $A = \mathrm{lk.e}$. Also ist der Modul eines jeden künstlichen Systems, durch den bey demselben Systeme der Grundzahl der natürlichen Logarithmen zugehörigen Logarithmen bestimmt.

25. §.

Und wenn u = 10 die Grundzahl der gemeinen Logarithmen ist, mithin lg. 10 = 1 (I. Band. 134. §. 1. Zus.); so ist ln. 10 : 1 = 1 : A (22. §.), daher $A = \frac{1}{\ln . 10}$, das heißt: die Einheit dividirt durch den natürlichen Logarithmen von 10, giebt den Modul der gemeinen Logarithmen.

26. §.

Auf diesem Wege lassen sich demnach die logarithmischen Reihen mit mehr Evidenz und Bündigkeit erfinden, als auf dem im ersten Bande eingeschlagenen. Man kann nun auch die daselbst enthaltene Lehre von der Berechnung der Logarithmen folgendermaßen berichtigen. Es ist nämlich im ersten Bandes 138sten §. nicht μ, sondern $\frac{1}{\mu}$ der Modul des logarithmischen Systems. Daher ist auch im dortigen 138. §. 2. Zusatz, nicht μ, sondern $\frac{1}{\mu}$ der Modul der gemeinen Logarithmen, welcher also, wie oben A in (21. §.), muß bestimmt werden. Und nun muß man statt des dortigen Satzes in 138. §. 3. Zus., den obigen (22. §.) nehmen, und darnach auch den dortigen 4ten Zusatz in 138. §. verbessern.

Bey dieser Gelegenheit bemerke ich, daß solche Fehler sich auch in einigen später erschienenen Schriften befinden, z. B. beym H. L'Huilier (a), und Leiste (b): jener nimmt in 58. bis 63. §. exclusive A für den Modul, da doch bey ihm $\frac{1}{A}$ der Modul ist: dieser hält in 112. §. K für den Modul, da er doch $\frac{1}{K}$ seyn muß.

(a) Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris etc. Tubingae. 1795.

(b) Die Arithmetik und Algebra. ꝛc. Wolfenbüttel. 1790.

27. §.

Was die wirkliche Berechnung der natürlichen und gemeinen Logarithmen anbelangt, so ist sie im ersten Bande, von dem dortigen 5ten Zusatze des 138sten §. an, bis zum Ende des Abschnittes ganz richtig erklärt worden. Die daselbst in (139. §.) angegebene Formul ist eben die, welche gewöhnlich zur Berechnung der Logarithmen vorgeschrieben wird: statt ihrer würde ich die im 1sten Zusatze darauf folgende Formul, als welche ungemein vortheilhafter ist, allemahl empfehlen, selbst zur Berechnung der Logarithmen für die zehn ersten Zahlen.

1. Wenn man die Brüche $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, etc. in Decimalbrüche verwandelt; so kann man den natürlichen Logarithmen jeder Primzahl A so ausdrücken:

$$\text{Log. nat. } A = \tfrac{1}{2}(l(A+1)+l(A-1)) + \frac{1{,}0000000000 \text{ etc.}}{2A^2-1} + \frac{0{,}3333333333 \text{ etc.}}{(2A^2-1)^3} + \frac{0{,}2000000000 \text{ etc.}}{(2A^2-1)^5} + \frac{0{,}1428571428 \text{ etc.}}{(2A^2-1)^7} + \frac{0{,}1111111111 \text{ etc.}}{(2A^2-1)^9} + \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

2. Wenn man aber die Formul in (I. Band. 139. §. 1. Zus.) mit 0,4342944819 multiplicirt, dann diese Zahl durch die einzelnen Zahlen 2, 3, 5, 7, 9, etc. dividirt; so

so erhält man daraus folgende Formul für die gemeinen Logarithmen der Primzahlen A.

$$\text{Log. vulg. } A = 0{,}2171472409\,(l(A+1)+l(A-1)) + \frac{0{,}4342944819}{2A^2-1} + \frac{0{,}1447648273}{(2A^2-1)^3} + \frac{0{,}0868588963}{(2A^2-1)^5} + \frac{0{,}0620420688}{(2A^2-1)^7} + \frac{0{,}0482549424}{(2A^2-1)^9} + \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

3. Es verstehet sich, daß diese Formuln desto genauer sind, jemehr Decimalziffern man dazu nimmt. Setzt man nun $\frac{1+x}{1-x} = 2$; so ist $x = \frac{1}{3}$, daher Log. nat. $2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \text{etc.}\right)$ nach (19. §.). Auf diese Art kann man den natürlichen Logarithmen von 2 aufsuchen: multiplicirt man ihn hierauf mit 0,43429448 etc. so erhält man zum Product den gemeinen Logarithmen von 2.

Hat man diese Logarithmen gefunden; so kann man dadurch sowohl die natürlichen, als die gemeinen Logarithmen mit Hülfe der vorhergehenden Formuln (1) (2) ganz leicht berechnen; etwa die natürlichen nach (1) so:

Weil l2 bekannt ist; so erhält man dadurch auch $l4 = 2\,l2 = l2 + l2$; und $l8 = 3\,l2 = l4 + l2$. Ferner für $A = 3$, daher $2A^2 - 1 = 2.9 - 1 = 17$, erhält man l3 durch l4 und l2: und nun findet man $l6 = l3 + l2$; $l9 = 2\,l3$. Setzt man ferner $A = 5$, daher $2A^2 - 1 = 2.25 - 1 = 49$; so wird man l5 durch l6 und l4 bestimmen; hernach für $A = 7$, $2A^2 - 1 = 2.49 - 1 = 97$, auch l7 durch l8 und l6. Eben so kann man fortfahren, die Logarithmen der Primzahlen 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, u. s. f. zu suchen.

4. Es ist übrigens einleuchtend, daß für grössere Primzahlen man immer weniger Glieder bey (1) (2) zu nehmen braucht, um ihre Logarithmen bis auf etliche Decimalstellen genau zu berechnen.

Ich will annehmen, man wolle den natürlichen Logarithmen einer ganzen, zwischen 100 und 1000 liegenden dreystelligen Zahl $\alpha\beta\gamma = A$ wissen. Weil $A^2 = (\alpha\beta\gamma)^2$ wenigstens 5, mithin auch $2A^2 - 1$ wenigstens 5 Ziffern haben muß; so wird $(2A^2 - 1)^3$ wenigstens 13 Ziffern haben: also werden die zwey ersten Glieder der obigen Reihe (1) hinreichen, den natürlichen Logarithmen einer solchen Zahl bis auf 7 Decimalstellen genau zu bestimmen; und wenn man noch das dritte Glied dazu nimmt: so wird man dadurch jenen Logarithmen bis auf 13 Decimalstellen genau berechnen können.

28. §.

Um noch eine Probe des vortheilhaften Gebrauchs der vorhergehenden Theorie bey der Erfindung der Reihen

für

für gewisse Functionen zu geben, will ich die Reihen für Sin φ und Cosin φ suchen, welche im ersten Bandes 158sten §. auf einem andern weniger überzeugenden Wege bestimmt worden.

1. Man nehme an, ω sey was immer für ein aliquoter Theil des Kreisbogens φ; so hat man, nach (I. Band. 156. §.).

$$\text{Sin}(\varphi+\omega) = \text{Sin}\,\varphi\ \text{Cos}\,\omega + \text{Cos}\,\varphi\ \text{Sin}\,\omega,$$
$$\text{Cos}(\varphi+\omega) = \text{Cos}\,\varphi\ \text{Cos}\,\omega - \text{Sin}\,\varphi\ \text{Sin}\,\omega.$$

2. Nun sollen die Coefficienten B, C, D, etc. dergestalt beschaffen seyn, daß für sie und jeden möglichen Kreisbogen φ folgende Gleichung Statt finde.

$$\text{Sin}\,\varphi = \varphi + B\varphi^2 + C\varphi^3 + D\varphi^4 + \ldots + P\varphi^{2n} + Q\varphi^{2n+1} + R\varphi^{2n+2} + S\varphi^{2n+3} + \text{etc.}$$

Da Cosin φ von Sin φ abhängt; so ist gewiß durch diese Reihe, auch die Reihe für Cosin φ bestimmt, dergestalt, daß diese aus jener nach einem bestimmten Gesetze sich ableiten läßt: am bequemsten wird man sie so finden.

3. Wegen 2 ist auch $\text{Sin}\,\omega = \omega + B\omega^2 + C\omega^3 + D\omega^4 + E\omega^5 + \text{etc.}$

4. Also müssen gewisse von ω unabhängige Coefficienten k, l, m, etc. möglich seyn, für welche man $\text{Sin}\,\omega^2 = \omega^2 + k\omega^3 + l\omega^4 + m\omega^5 + \text{etc.}$ in (3) erhalten würde: und eben deswegen müssen andere von ω unabhängige Coefficienten u, v, x, möglich seyn, für welche $\text{Cosin}\,\omega = (1 - \text{Sin}\,\omega^2)^{\frac{1}{2}}$ sich in folgende Reihe würde verwandeln lassen (10. 11. §.):

$$\text{Cosin}\,\omega = 1 + u\omega^2 + v\omega^3 + x\omega^4 + \text{etc.}$$

5. Aus (1) (3) (4) erhält man:

$$\mathrm{Sin}(\varphi+\omega) = \mathrm{Sin}\,\varphi + u\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\omega^2 + v\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\omega^3 + \text{etc.}$$
$$+ \mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,\omega + B\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,\omega^2\, C\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,\omega^3 + \text{etc.}$$

6. Ferner wegen (2) soll auch folgende Gleichung bestehen:

$$\mathrm{Sin}(\varphi+\omega) = \varphi+\omega+B(\varphi+\omega)^2+C(\varphi+\omega)^3+D(\varphi+\omega)^4$$
$$+ \cdots + P(\varphi+\omega)^{2n}+Q(\varphi+\omega)^{2n+1}+R(\varphi+\omega)^{2n+2}$$
$$+S(\varphi+\omega)^{2n+3}+ \text{etc.}$$

Weil aber jede mte Potenz von $\varphi+\omega$ eine Reihe von der Form $\varphi^m + m\varphi^{m-1}.\omega + \alpha\omega^2 + \beta\omega^3 + \gamma\omega^4 + \text{etc.}$ giebt, wobey α, β, γ, etc. von ω gar nicht abhängen (10. §.); so ist klar, daß andere von ω unabhängige Coefficienten a, b, c, etc. möglich seyn müssen, für welche die vorige Reihe sich in folgende verwandeln läßt:

$$\mathrm{Sin}(\varphi+\omega) = \varphi + B\varphi^2 + C\varphi^3 + \cdots + S\varphi^{2n+3}$$
$$+ \omega(1 + 2B\varphi + 3C\varphi^2 + 4D\varphi^3 + \cdots$$
$$+ 2nP\varphi^{2n-1} + (2n+1)Q\varphi^{2n} + (2n+2)R\varphi^{2n+1}$$
$$+ (2n+3)S\varphi^{2n+2}) + a\omega^2 + b\omega^3$$
$$+ c\omega^4 + \text{etc.}$$

7. Die Reihen (6) (5) müssen einander gleich seyn; überdem ist, wegen (2), der von ω unabhängige Theil der Reihe (5) dem von ω unabhängigen Theile der Reihe (6) gleich: also ist auch der übrige Theil der Reihe (5) dem anderen Theile der Reihe (6) gleich; daher werden dieselben Theile, durch ω dividirt, folgende Gleichung geben:

$u \operatorname{Sin}\varphi . \omega + v \operatorname{Sin}\varphi . \omega^2 + \text{etc.} + \operatorname{Cos}\varphi + B \operatorname{Cos}\varphi . \omega$
$+ C \operatorname{Cos}\varphi . \omega^2 + \text{etc.} = 1 + 2B\varphi + 3C\varphi^2 + 4D\varphi^3 + \ldots$
$+ 2nP\varphi^{2n-1} + (2n+1)Q\varphi^{2n} + (2n+2)R\varphi^{2n+1}$
$+ (2n+3)S\varphi^{2n+2} + \text{etc.} + a\omega + b\omega^2 + c\omega^3 + \text{etc.}$

Diese Gleichung soll aber für jeden möglichen aliquoten Theil ω des Kreisbogens φ in (2) gelten: bey ihr ist also nach (5. §.):

$$\operatorname{Cosin}\varphi = 1 + 2B\varphi + 3C\varphi^2 + 4D\varphi^3 + \text{- - - - - - -}$$
$$+ 2nP\varphi^{2n-1} + (2n+1)Q\varphi^{2n} + (2n+2)R\varphi^{2n+1}$$
$$(2n+3)S\varphi^{2n+2} + \text{etc.}$$

Das heißt: wenn man annimmt, daß die Reihe in (2) für jeden Kreisbogen φ gilt; so muß dafür auch diese Reihe gelten.

8. Nun müssen wir sehen, ob es gewisse Werthe von A, B, C, D, etc. wirklich giebt, für welche die Reihen (2) (7) bestehen mögen. In (7) wäre auch:

$$\operatorname{Cos}(\varphi+\omega) = 1 + 2B(\varphi+\omega) + 3C(\varphi+\omega)^2 + 4D(\varphi+\omega)^3 +$$
$$\text{- - - -} + 2nP(\varphi+\omega)^{2n-1} + (2n+1)Q(\varphi+\omega)^{2n}$$
$$+ (2n+2)R(\varphi+\omega)^{2n+1} + (2n+3)S(\varphi+\omega)^{2n+2} + \text{etc.}$$

Hat aber diese Gleichung ihre Richtigkeit; so müssen gewisse von ω unabhängige Coefficienten f, g, h, etc. möglich seyn, für welche sie in folgende übergehen würde (10. §.).

$$\operatorname{Cos}(\varphi+\omega) = 1 + 2B\varphi + 3C\varphi^2 + 4D\varphi^3 + \text{- - -} + (2n+3)S\varphi^{2n+2}$$
$$+ (2B + 2.3C\varphi + 3.4D\varphi^2 + \text{- - - - - - -}$$
$$+ (2n-1)2nP\varphi^{2n-2} + 2n(2n+1)Q\varphi^{2n-1}$$
$$+ (2n+1)(2n+2)R\varphi^{2n} + (2n+2)(2n+3)S\varphi^{2n+1}$$
$$+ \text{etc.})\,\omega + f\omega^2 + g\omega^3 + h\omega^4 + \text{etc.}$$

9. Wegen 1) 4) 3) müßte aber seyn:

$$\mathrm{Cos}(\varphi+\omega)=\mathrm{Cos}\,\varphi+u\,\mathrm{Cos}\,\varphi.\omega^2+v\,\mathrm{Cos}\,\varphi.\omega^3+x\,\mathrm{Cos}\,\varphi.\omega^4+\text{etc.}$$
$$-\mathrm{Sin}\,\varphi.\omega-B\,\mathrm{Sin}\,\varphi.\omega^2-C\,\mathrm{Sin}\,\varphi.\omega^3-\text{etc.}$$

10. Daher hätte man in 8) 9) gleiche Reihen: beyde durch ω dividirt, gäben also, wegen 7) folgende Gleichung:

$$2B+2.3C\varphi+3.4D\varphi^2+\cdots+(2n-1)2nP\varphi^{2n-2}$$
$$+2n(2n+1)Q\varphi^{2n-1}+(2n+1)(2n+2)R\varphi^{2n}$$
$$+(2n+2)(2n+3)S\varphi^{2n+1}+\text{etc.}+f\omega+g\omega^2+h\omega^3+\text{etc.}$$
$$=u\,\mathrm{Cos}\,\varphi.\omega+v\,\mathrm{Cos}\,\varphi.\omega^2+x\,\mathrm{Cos}\,\varphi.\omega^3+\text{etc.}-\mathrm{Sin}\,\varphi$$
$$-B\,\mathrm{Sin}\,\varphi.\omega-C\,\mathrm{Sin}\,\varphi.\omega^2-\text{etc.}$$

Und weil diese Gleichung für jeden möglichen aliquoten Theil ω des Kreisbogens φ gelten sollte: so wäre bey ihr, nach (5. §.), $2B+2.3C\varphi+3.4D\varphi^2+\text{etc.}=-\mathrm{Sin}\,\varphi$, mithin

$$\mathrm{Sin}\,\varphi=-2B-2.3C\varphi-3.4D\varphi^2-\cdots-(2n-1)2nP\varphi^{2n-2}$$
$$-2n(2n+1)Q\varphi^{2n-1}-(2n+1)(2n+2)R\varphi^{2n}$$
$$-(2n+2)(2n+3)S\varphi^{2n+1}-\text{etc.}$$

11. Auf diese Art würde man zwo einander gleiche Reihen in 10) 2) haben, bey welchen demnach nach (7. §.) wäre:

$$P=-(2n+1)(2n+2)R,\ \text{und}\ R=\frac{-P}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Hieraus erhellet überhaupt, daß der Coefficient R jeder geraden Potenz φ^{2n+2} in 2) gleich Null seyn müßte, wenn der Coefficient P der nächst niedrigeren geraden Potenz φ^{2n} in 2) gleich Null wäre: da also bey den Reihen 10) 2) $-2B=0$ (7. §.), folglich $B=0$ seyn würde, welches

der

der Coefficient der niedrigsten geraden Potenz φ^2 in 2) seyn sollte; so müßten die Coefficienten aller geraden Potenzen $\varphi^2, \varphi^4, \varphi^6, \ldots \varphi^{2n}, \varphi^{2n+2}$ in 2) gleich Null seyn, und weil diese zu den Coefficienten der ungeraden Potenzen $\varphi, \varphi^3, \varphi^5$, etc. in 7) gehören; so müßten auch diese gleich Null seyn. In 2) 7) 10) müßte also stehen:

$$\text{I. } \operatorname{Sin}\varphi = \varphi + C\varphi^3 + E\varphi^5 + \ldots + Q\varphi^{2n+1} + S\varphi^{2n+3}$$

$$\text{II. } \operatorname{Cos}\varphi = 1 + 3C\varphi^2 + 5E\varphi^4 + \ldots + (2n+1)Q\varphi^{2n} + (2n+3)S\varphi^{2n+2}$$

$$\text{III. } \operatorname{Sin}\varphi = -2.3C\varphi - \ldots - 2n(2n+1)Q\varphi^{2n-1} - (2n+2)(2n+3)S\varphi^{2n+1} - \text{etc.}$$

12. Bey diesen gleichen Reihen I) III) hätte man nach (7. §.) $-2.3\,C = 1$, und überhaupt $-(2n+2)(2n+3)S = Q$: also

$$C = \frac{-1}{2.3},$$

und überhaupt

$$S = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} \times Q.$$

Nach diesen Werthen erhält man endlich aus I) II) die bekannten Reihen:

$$\operatorname{Sin}\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2.3\ldots7} + \ldots \pm \frac{\varphi^{2n+1}}{1.2.3\ldots2n(2n+1)} \mp \frac{\varphi^{2n+3}}{1.2.3\ldots(2n+2)(2n+3)} \ldots$$

$$\operatorname{Cosin}\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2.3\ldots6} + \ldots \pm \frac{\varphi^{2n}}{1.2.3\ldots2n} \mp \frac{\varphi^{2n+2}}{1.2.3\ldots(2n+2)} \ldots$$

29. §.

Eben so ausgedehnt ist der Gebrauch des Satzes in (9. §.): man kann sich desselben bey vielen wichtigen Untersuchungen in der Geometrie, und Mechanik bedienen, vorzüglich alsdann, wenn man ihn mit der Lehre von der Summirung der Potenzenreihen natürlicher Zahlen verbindet; selbst bey der Lehre von Größten und Kleinsten würde jener Satz vom größten Nutzen seyn, wenn diese Lehre durch die Differential-Rechnung nicht ungemein abgekürzt würde.

Z. B. Sey die Function $Ax - Bx^2$ gegeben, und man verlange den Werth von x zu wissen, für welchen sie am größten wird.

Nehme ich an, daß x einen solchen Werth bereits erhalten hat; so wird, wenn ω einen wie immer kleinen aliquoten Theil von x bedeutet, nach (II. Band. 71. §. 1 Zus.)

sowohl

$$Ax - Bx^2 > A(x+\omega) - B(x+\omega)^2$$

als

$$Ax - Bx^2 > A(x-\omega) - B(x-\omega)^2$$

seyn müssen. Hieraus erhält man aber

I. $Ax - Bx^2 > Ax + A\omega - Bx^2 - 2B\omega x - B\omega^2$;

II. $Ax - Bx^2 > Ax - A\omega - Bx^2 + 2B\omega x - B\omega^2$.

Demnach ist

$$2Bx\omega > A\omega - B\omega^2 \text{ in I)}$$

$$2Bx\omega < A\omega + B\omega^2 \text{ in II)}$$

oder $2Bx > A - B\omega$

und $2Bx < A + B\omega$.

Nach

Nach (9. §.) ist also $2Bx = A$, und $x = \frac{A}{2B}$ der verlangte Werth von x.

Ferner sey der Werth von x zu bestimmen, für welchen die Function $\frac{A + Bx^2}{x}$ am kleinsten wird.

Wenn man voraussetzt, daß x denselben Werth bereits erlangt hat, und hierauf einen wie immer kleinen aliquoten Theil e von x nimmt; so wird seyn nach (II. Band. 71. §. 1. Zus.)

$$\frac{A + Bx^2}{x} < \frac{A + B(x + e)^2}{x + e};$$

$$\frac{A + Bx^2}{x} < \frac{A + B(x - e)^2}{x - e};$$

also

$$\text{I. } (A + Bx^2)(x + e) < Ax + Bx(x + e)^2;$$

$$\text{II. } (A + Bx^2)(x - e) < Ax + Bx(x - e)^2.$$

Demnach findet man

$$Bx^2 > A - Bxe \text{ in I.)};$$

$$Bx^2 < A + Bxe \text{ in II.)}.$$

Mithin ist $Bx^2 = A$ nach (9. §.), und nun $x = \sqrt{\frac{A}{B}}$ der Werth von x, für welchen die obige Function am kleinsten wird.

Man soll den Werth von x finden, für welchen die Function $\frac{ax - b}{cx^4 + d}$ am größten wird.

Es wird seyn für einen wie immer kleinen aliquoten Theil e von x.

$$\frac{ax - b}{cx^2 + d} > \frac{a(x+e) - b}{c(x+e)^2 + d};$$

$$\frac{ax - b}{cx^2 + d} > \frac{a(x-e) - b}{c(x-e)^2 + d}.$$

Daher ist auch

$$\text{I. } (ax - b)(c(x+e)^2 + d) > (cx^2 + d)(a(x+e) - b);$$

$$\text{II. } (ax - b)(c(x-e)^2 + d) > (cx^2 + d)(a(x-e) - b).$$

Und hieraus findet man:

$$acx^2e - 2bcxe + axce^2 - bce^2 > ade \text{ in I.});$$

$$- acx^2e + 2bcxe + axce^2 - cbe^2 > - ade \text{ in II.}).$$

Daher hat man

$$acx^2 - 2bcx > ad - (ax - b)ce;$$

$$acx^2 - 2bcx < ad + (ax - b)ce.$$

Folglich nach (9. §.

$$acx^2 - 2bcx = ad; \text{ und nun}$$

$$x^2 - \frac{2b}{a}x = \frac{d}{c},$$

$$x = \frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{c} + \frac{b^2}{a^2}\right)},$$

$$\text{oder } x = \frac{b}{a}\left(1 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{a^2d}{b^2c}\right)}\right).$$

30. §.

Die Methode, nach welcher wir die Reihen für Sin φ, Cosin φ in (28. §.) gefunden haben, könnte auch auf die Erfindung der Reihen für die übrigen Functionen von φ, wie Sin v φ, Cos v φ, Tang. φ, u. s. f. angewandt werden: man kann aber diese Reihen auch aus den bereits bekannten (28. §.) ableiten; auch alle umkehren, und den

Bogen

Bogen φ durch Sin φ, Cosin φ, Sin v φ, u. s. f. bestimmen. Die logarithmischen Reihen können ferner gebraucht werden, die Reihen für die sogenannten Exponentialgrößen zu bestimmen. Denn wenn man z. B. $y = u^v$ hätte; so wäre $l y = v l u$: also nach (16. §.)

$$y = 1 + \frac{vlu}{A} + \frac{v^2 lu^2}{2A^2} + \frac{v^3 lu^3}{2.3.A^3} + \frac{v^4 lu^4}{2.3.4.A^4} + \text{etc.},$$

mithin

$$u^v = 1 + \frac{vlu}{A} + \frac{v^2 lu^2}{2A^2} + \frac{v^3 lu^3}{2.3.A^3} + \frac{v^4 lu^4}{2.3.4.A^4} + \text{etc.}$$

Und wenn man u^v durch u und v, nicht aber durch v und l u, ausdrücken wollte; so brauchte man hier nur l u nach (12. §.) für $1 + x = u$, daher $x = u - 1$ zu bestimmen.

Hieraus erhellet nun, daß, weil doch die trigonometrischen, und logarithmischen Functionen, nebst Exponentialgrößen allein die bey analytischen Untersuchungen brauchbaren transcendenten Functionen abgeben, alle transcendente Functionen von einer veränderlichen Größe z sich durch gewisse gleichgültige algebraische Functionen ausdrücken lassen, entweder weil sie wirklich zu trigonometrischen oder logarithmischen Functionen, oder den damit verwandten Exponentialgrößen gehören, oder weil sie sich auf solche auf irgend eine Art sollen zurückführen lassen.

31. §.

Auf diesen Gründen beruhet folgender Satz. Wenn A, B, C, D, - - - a, b, c, etc. ganz unbestimmte Größen bedeuten, die doch von der veränderlichen Größe z

nicht abhängen; so läßt sich jede Function y von einer veränderlichen Größe z durch $y = Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d +$ etc. ausdrücken, entweder weil sie wirklich diese Form hat, oder weil es möglich ist, sie in eine Function von dieser Form zu verwandeln.

Einige Schriftsteller nehmen diesen Satz bey ihren Untersuchungen als ein Postulatum an: dieses läßt sich bloß dadurch rechtfertigen, daß alle Functionen, wenn sie brauchbar seyn sollen, sich doch unter eine solche Form sollen bringen lassen, bey welcher das Gesetz, nach dem sie von der veränderlichen Größe und beständigen Größen abhängen, am bequemsten entdeckt werden kann. Wegen des wichtigen Gebrauchs, den ich davon in der Folge machen werde, glaube ich indessen verpflichtet zu seyn, die Gründe kurz zu berühren, aus welchen er sich darthun läßt.

1. Hätte man $U = (Az^a + Bz^b)^m$; so würde diese Potenz für jeden Exponenten m sich in eine Reihe von der Form $Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d +$ etc. verwandeln lassen (11. §. und I. Band. 76. §. 4. Zus. 3. n).

2. Ist $V = Az^a + Bz^b + Cz^c + \ldots + Pz^p$ ein Polynomium von r Gliedern; so ist $V + Qz^q$ ein von $r+1$ Gliedern: und nun ist für jeden Exponenten m $(V + Qz^q)^m = V^m + \alpha V^{m-1} . Qz^q + \beta V^{m-2} . Q^2 z^{2q} + \gamma V^{m-3} . Q^3 z^{3q} +$ etc. Für gewisse von z unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. (Daselbst). Wenn man also annimmt, jede Potenz V^m, V^{m-1}, V^{m-2}, V^{m-3}, u. s. f. sey einer Reihe von der Form $Az^a + Bz^b + Cz^c +$ etc. gleich; so muß auch die Potenz $(V + Qz^q)^m$ einer Reihe von derselben Form gleich seyn.

3 Auf diese Art läßt sich aufs schärfste darthun, daß die mte Potenz einer Function von der Form $Az^a + Bz^b + Cz^c + \text{etc.}$ für jeden Exponenten m einer Function von derselben Form gleich ist. Denn aus (1) erhellet, daß dieses für eine 2theilichte Funktion wirklich gilt, und aus 2) folgt, dasselbe müsse für die (r+1)theilichte gelten, sobald es für irgend eine r theilichte gilt: also muß es für jede vieltheilichte Function gelten (I. Band. 54. §.).

Nun läßt sich der obige Satz für alle algebraische Functionen, wie in (II. Band. 6. §.) beweisen, den man hierauf auch für die transcendenten Functionen kann gelten lassen (30. §.).

32. §.

Der Beweis des binomischen Lehrsatzes im 8ten Abschnitte des ersten Bandes, verdient alle Aufmerksamkeit eines Analysten: was ihn vorzüglich interessant macht, sind die Gründe, worauf er beruhet. Denn man kann denselben Lehrsatz auch auf einem andern, wenn nicht einfacheren, gewiß gleich einfachen und sichersten Wege finden: dieses habe ich oben (11. §.) gezeigt, und auf gleiche Art ließe sich die Untersuchung über die Potenz $(1+\alpha x+\beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.})^m$ anstellen, welche im 85sten §. des ersten Bandes vorkömmt. Aber die Gründe der Beweise für $(1+x)^m$, und $(1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\text{etc.})^m$, welche ich im ersten Bande aus den Papieren des sel. Mitterpachers ausgeführt habe, sind merkwürdiger, als sie ihm, und mir, da ich den Entwurf zu jenen Beweisen in seinen Papieren las, zu seyn schienen. Ich werde diesen Entwurf

 von

von Wort zu Wort hersetzen, wie er mir unter andern Fragmenten von seinem würdigsten Bruder, Hrn. Ludw. Mitterpacher, Prof. der Naturgeschichte und Technologie bey der Ungarischen Universität übergeben wurde. Da aus diesem Entwurfe allein der 8te Abschnitt im ersten Bande entstanden ist; so wird man sich durch die Vergleichung desselben mit diesem Abschnitte einen Begriff von meiner eigenen Arbeit machen können, welche ich bey der Abfassung des im ersten Bande enthaltenen Unterrichts hatte, indem auf gleiche Art der gesammte Unterricht aus solchen Entwürfen entstanden ist: und nun wird man im Stande seyn, das, was ich in Ansehung meiner Arbeit bey der Abfassung des ersten Bandes in den beyden Vorreden, zum ersten und zweyten Bande, kurz angeführt habe, besser auszulegen. Hier ist der Mitterpachersche Entwurf:

1. Si polynomii cujusvis $1+ax^m+bx^n+cx^p+ \cdots +kx^s+lx^t$ elevati ad quadratum termini singuli ducantur in exponentem variabilis x ejusdem termini, non excluso etiam exponente 0 (quam exponentium seriem deinceps per E designabo), nascitur factum = duplo polynomio ducto in idem polynomium, sed cujus termini singuli ducti sint in exponentem variabilis x ejusdem termini (quam exponentium seriem per e indicabo), seu $(1+ax^m+bx^n+cx^p+ \cdots +kx^s+lx^t)^2$. $E = 2(1+ax^m+bx^n+cx^p+ \cdots +kx^s+lx^t)(1+ax^m+bx^n+cx^p+ \cdots +kx^s+lx^t)(0, m, n, p, \cdots s, t)$, seu $= 2(1+ax^m+bx^n+cx^p+ \cdots +kx^s+lx^t)(max^m+nbx^n+pcx^p+ \cdots +skx^s+tlx^t)$.

Dem.

Dem. Veritas aſſerti evidenter patet in binomio $(1+ax^m)^2$. Nam $(1+ax^m)^2.E = 1.0 + 2max^m + 2ma^2x^{2m} = 2(max^m + ma^2x^{2m}) = 2(1+ax^m).max^m = 2(1+ax^m)(1+ax^m)(0, m)$.

Non minus evidens eſt etiam in trinomio $1+ax^m+bx^n$. Nam $(1+ax^m+bx^n)^2.E = 1.0 + 2max^m + 2ma^2x^{2m} + 2nbx^n + 2(m+n)abx^{m+n} + 2nb^2x^{2n} = 2(max^m + ma^2x^{2m} + nbx^n + (m+n)abx^{m+n} + nb^2x^{2n}) = 2(1+ax^m+bx^n)(max^m + nbx^n) = 2(1+ax^m+bx^n)(1+ax^m+bx^n)(0, m, n)$.

Pone jam in aſſumpti polynomii r primis terminis, ſcilicet $1+ax^m+bx^n+cx^p+ \cdots +kx^s = \varrho$ elevatis ad quadratum, ac in ſuos reſpectivos exponentes ductis dictam legem obtinere; obtinebit etiam, ſi eidem polynomio adjiciatur $(r+1)$*tus* terminus, ſeu lx^t, hoc eſt, erit etiam $(\varrho+lx^t)^2.E = 2(\varrho+lx^t)(\varrho+lx^t)(e, t)$. Eſt enim $(\varrho+lx^t)^2.E = (\varrho^2 + 2\varrho lx^t + l^2x^{2t})E$. Jam vero $\varrho^2.E = 2\varrho.\varrho.e$ (ex hypotheſi), et $2\varrho lx^t.E = 2\varrho lx^t(e+t)$, quippe, ob duplam ſummam omnium praecedentium terminorum ϱ in terminum adjectum lx^t, patet, exponentem cujusvis termini eſſe ſummam ex t, et aliquo ex ϱ, ſeu (cum hujus exponentes ſucceſſivi deſignentur per e) ex $(e+t)$. Porro quivis terminus ducitur in exponentem variabilis ejusdem termini: ergo quivis ducitur in aliquem exponentem $(e+t)$, eſt igitur in hoc caſu $E=e+t$. Denique $l^2x^{2t}.E = l^2x^{2t}.2t = 2lx^t.tlx^t$, igitur $(\varrho+lx^t)^2.E = 2\varrho.\varrho e + 2\varrho lx^t(e+t) + 2lx^t.tlx^t = 2(\varrho+lx^t)(\varrho e + tlx^t) = 2(\varrho+lx^t)(\varrho+lx^t)(e, t)$. Ergo ſi dicta lex obtinet in ϱ ſeu r terminis, obtinet etiam in $\varrho+lx^t$ ſeu $r+1$ terminis:

atqui assumpta hypothesis vera est pro binomio et trinomio (ut demonstratum est), seu pro $r=2$, item $r=3$; ergo vera est etiam pro $r+1$, seu pro $r=4$, hoc est, si ad 3 terminos adjiciatur 4*tus*: si pro $r=4$, tum et pro $r+1$, seu 5, et sic porro, quotcunque terminis constet polynomium.

2. $((1+X)Z).E=(1+X).eZ+Z(1+X)e$ (ubi per $1+X$ ejusmodi etiam polynomium, quale §. 1. assumpsi, intelligi potest, litera E designante seriem exponentium utriusque variabilis, e vero seriem exponentium polyn. $(1+X)$, aut Z, prout ea illi vel huic immediate jungitur).

Dem. Pone $y=(1+X)Z$, erit $y.E=((1+X)Z)E$. Jam vero $4y=((1+X)+Z)^2-((1+X)-Z)^2$: igitur $4y.E=((1+X)+Z)^2.E-((1+X)-Z)^2.E$. Est vero $((1+X)+Z)^2.E=2((1+X)+Z)((1+X)+Z)e$ $=2((1+X)+Z)((1+X)e+eZ)$ ex (§. 1.). Et $-((1+X)-Z)^2.E=-2((1+X)-Z)((1+X)-Z)e$ $=-2((1+X)-Z)((1+X)e-eZ)$ (ibid.). Unde

$$4yE=2(1+X)(1+X)e+2Z(1+X)e+2(1+X)eZ+2Z.eZ$$
$$-2(1+X)(1+X)e+2Z(1+X)e+2(1+X)eZ-2Z\,eZ,$$

seu $4yE=4Z(1+X)e+4(1+X)eZ$, ac denique

$$y.E=((1+X)Z)E=Z(1+X)e+(1+X)eZ. \text{ Q. E. D.}$$

3. Ostendendum jam est, esse generatim $(1+X)^m.E$ $m(1+X)^{m-1}(1+X)e$.

A) Sit m numerus integer positivus, et $y=(1+X)^{m+1}$, $Z=(1+X)^m$, ac demus, esse $Z.E=m(1+X)^{m-1}(1+X)e$, erit $Z(1+X)=(1+X)^{m+1}=y$, hinc $y.E=(Z(1+X))E$

=

$= Z(1+X)e + (1+X) . ZE$ (§. 3.), seu pro Z, et ZE substituendo superiores valores, $y.E = (1+X)^m (1+X)e + m(1+X)^m (1+X)e$, seu $y.E = (m+1)(1+X)^m (1+X)e$. In hac porro expressione potentia unitate imminuta ducitur in exponentem potentiae, tum in radicem ductam in suos exponentes, quare eadem lex obtinet in potentia $(m+1)$*ma*, si obtinere ponamus in *mta*, obtinet vero in *mta* si $m=2$, ut ostensum (§. 1.), igitur etiam si $m=3$; si pro $m=3$ tum et pro 4, etc. adeoque si pro m quemvis numerum integrum positivum substituas.

B) Eadem lex ergo obtinebit pro quolibet exponente positivo fracto $m = \frac{u}{v}$: nam posito $y = (1+X)^{\frac{u}{v}}$, erit $y^v = (1+X)^u$, hinc $y^v.E = (1+X)^u.E$, unde per A) reperies $yE = \frac{u}{v}(1+X)^{\frac{u}{v}-1}(1+X)e$.

C) Hinc etiam pro quolibet exponente, integro et fracto, negativo $m = -n$. Cum enim sit $(1+X)^{-n} = \frac{1}{(1+X)^n}$, erit $(1+X)^{-n}(1+X)^{2n} = (1+X)^n$: quare etiam $((1+X)^{-n}(1+X)^{2n})E = (1+X)^n E$, unde per A) B) et (2. §.) reperietur $(1+X)^{-n}.E = -n(1+X))^{-n-1}(1+X)e$.

4. Sit jam quaerenda potentia $(1+x)^m$, seu y^m pro $y = 1+x$. Fiat $y^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.} = Z$; erit $my^{m-1}.ye = ZE$, hinc $my^m.ye = y.ZE$, et ideo etiam $mZ.ye = y.ZE$. Ex hac aequatione, pro $y = 1+x$, hinc $ye = 1.0 + x.1 = x$, et $Z = 1 + Ax$ $Bx^2 + Cx^3 +$ etc., adeoque $ZE = 1.0 + Ax.1 + Bx^2.2$

$+Cx^3+etc. = Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 +$ etc. per (§. 1.), derivari poterunt valores pro A, B, C, etc.

Eadem autem methodo definietur lex pro $(1+\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + etc.)^m$, nimirum methodo ei simili, qua *Kästnerus* in sua analysi infinitorum usus est.

33. §.

Als ich nun die bey diesem Entwurfe gegebenen Winke benutzte, um den 8ten Abschnitt des ersten Bandes auszuarbeiten, bemerkte ich sogleich, was jeder würde bemerkt haben, daß nämlich darin die Gründe einer eigenen Rechnungsart versteckt liegen. Eben zu der Zeit hatte ich das Glück, in Pest mit Herrn Major Vega Bekanntschaft zu machen, dem ich auch nicht ermangelte meine Bemerkungen mitzutheilen. Indessen war ich, theils durch die mißlichste Lage meiner Gesundheit, theils auch durch andere Geschäfte gehindert, der Sache gehörig nachzudenken, und erst einige Jahre darauf suchte ich, und fand, was ich finden zu können mit Grund vermuthete, nämlich eine neue Rechnungsmethode, welche ich die Exponential-Rechnung aus eben demselben Grunde nenne, aus welchem ich mich einer solchen Benennung bey der Lehre von Gleichungen im ersten Bande (113. §. Anm.) bedient habe. Im Archiv für die reine und angewandte Mathematik vom Herrn Professor Hindenburg werde ich sie ausführlich abhandeln.

34. §.

Ich nehme mir doch hier die Freyheit, nur die ersten Gründe davon kurz zu berühren.

I. Ich

I. Ich setze den binomischen Lehrsatz als erwiesen voraus, etwa wie oben (11. §.): eben so nehme ich an, daß man sich dadurch von der Richtigkeit des folgenden Satzes vollkommen überzeugt findet. (31. §.)

Jede mögliche Function y von einer veränderlichen Größe u kann durch $y = Au^a + Bu^b + Cu^c + etc.$ ausgedrückt werden, entweder, weil sie wirklich diese Form hat, oder weil sie einer Reihe von dieser Form gleich ist.

II. Durch eine absolute veränderliche Größe wird diejenige verstanden, welche keine Function von einer andern veränderlichen Größe, mithin in sich veränderlich seyn soll. II. Band. 2. §. 3. Zus.)

III. Das Exponential einer Function y von einer absoluten veränderlichen Größe x soll diejenige Function bedeuten, welche man erhalten würde, wenn die einzelnen Glieder der gleichgültigen Reihe $y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + etc.$ (I) mit den ihnen zugehörigen Exponenten von x (den Exponent o nicht ausgenommen) multiplicirte. Die Methode, die Exponentialien aus Functionen, und diese aus jenen zu bestimmen, kann die Exponential-Rechnung heißen. Die Bezeichnung endlich des Exponentials jeder Function y kann durch die Voraussetzung des Buchstaben ε geschehen.

Z. B. Für $y = 1 + ax + bx^2 + cx^{\frac{3}{2}} - dx^{-\frac{2}{3}}$

ist das Exponential

$$\varepsilon y = ax + 2bx^2 + \frac{3c}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2d}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

Aus

Aus diesen Begriffen lassen sich nun folgende Hauptsätze leicht ableiten, bey deren Ausführung ich mich, um den Vortrag aufs möglichste abzukürzen, der Zeichensprache bedienen werde.

IV. Für jede absolute veränderliche Größe x, und Constante C ist $\varepsilon x = x \cdot 1 = x$; $\varepsilon C = C \cdot 0 = 0$ (III.).

V. Für alle Functionen P, Q, R, - - - Z von einer absoluten veränderlichen Größe x, ist wegen (III.). $\varepsilon(P + Q + R + \ldots + Z) = \varepsilon P + \varepsilon Q + \varepsilon R + \ldots + \varepsilon Z$.

VI. Für jede Function Z von x, und jede Constante C ist $\varepsilon(Z + C) = \varepsilon Z$ nach (III.).

VII. Für zwo Functionen P, Q, von einer veränderlichen Größe x ist $\varepsilon . PQ = P . \varepsilon Q + Q . \varepsilon P$.

Beweis. 1. Vielleicht sind P, Q einfache Functionen, durch zwo Potenzen von x bestimmt, etwa $P = Kx^k$, $Q = Lx^l$: in diesem Fall ist $PQ = KLx^{k+l}$. Also nach (III.) $\varepsilon . PQ = (k + l) KL + x^{k+l} = kLx^l . Kx^k + lKx^k . Lx^l = Q . \varepsilon P + P . \varepsilon Q$, nach (III.).

2. Oder eine Function P gehört unter die Form Mx^m, die andere Q aber, ist einer Reihe $p + q + r + \ldots + z$ gleich, dergestalt, daß die einzelnen Glieder p, q, r - - - z eben so viele Functionen von der Form Mx^m sind (I.): bey dieser Voraussetzung nun muß seyn: $PQ = Pp + Pq + Pr + \ldots + Pz$; mithin $\varepsilon . PQ = \varepsilon . Pp + \varepsilon . Pq + \varepsilon . Pr + \ldots + \varepsilon . Pz$ (V.); folglich wegen des Erwiesenen in 1) auch $\varepsilon . PQ = P \varepsilon p + p \varepsilon P + P \varepsilon q + q \varepsilon P + P \varepsilon r + r \varepsilon P + \ldots + P \varepsilon z + z \varepsilon P = P(\varepsilon p + \varepsilon q + \varepsilon r + \ldots + \varepsilon z) + (p + q + r + \ldots + z) \varepsilon P = P . \varepsilon Q + Q . \varepsilon P$ (V.).

3. Oder jede unter den Functionen P, Q, ist einer $p+q+r+ \cdots +z$ gleich, wobey $p, q, r, \cdots z$ eben so viele Functionen von der Form Mx^m seyn sollen (I.): und in diesem Fall, wenn man $Q=p+q+r+ \cdots +z$ setzt, wird man, wegen des für eine zusammengesetzte und eine einfache Function in 2) bereits erwiesenen Lehrsatzes, $\varepsilon.PQ=P.\varepsilon Q+Q.\varepsilon P$, wie in 2), finden.

VIII. Nach der bekannten Methode zu schließen, (I. Band. 54. §.) findet man aus (VII.), daß das Exponential des Products $PQR \cdots Z$ aus mehreren Functionen von x allemahl der Summe der Producte gleich ist, welche entstünden, wenn man das Exponential jedes einzelnen Factors mit allen übrigen Factoren multiplicirte.

IX. **Für jede Function z von x, und jede Zahl m ist** $\varepsilon.z^m=mz^{m-1}.\varepsilon z$.

Beweis. 1. Für eine ganze bejahte Zahl m erhellet dieses aus (VIII.).

2. Ist aber $m=\frac{u}{v}$ bey $y=z^m=z^{\frac{u}{v}}$ eine bejahte gebrochene Zahl: so ist $y^v=z^u$: also $vy^{v-1}.\varepsilon y=uz^{u-1}.\varepsilon z$ nach 1), mithin $\varepsilon y=\frac{u}{v}z^{\frac{u}{v}-1}.\varepsilon z$.

3. Ist endlich $m=-n$ eine ganze oder gebrochene verneinte Zahl bey $y=z^{-n}$; so hat man $yz^n=0$; also $nyz^{n-1}.\varepsilon z+z^n.\varepsilon y=0$ nach (VII.), und vor 1) 2), daher $\varepsilon y=-nz^{-n-1}.\varepsilon z$.

X. **Für alle Functionen u, v, von x ist** $\varepsilon\frac{u}{v}=\frac{v\varepsilon u-u\varepsilon v}{v^2}$.

Beweis.

Beweis. Denn es ist $yv=u$ für $y=\frac{u}{v}$: also $y\varepsilon v + v\varepsilon y = \varepsilon u$ (VII.); daher $\varepsilon y = \frac{v\varepsilon u - u\varepsilon v}{v^2}$.

XI. Nach den bisherigen Sätzen läßt sich das Exponential jeder algebraischen Function y von einer absoluten veränderlichen Größe vollkommen, und mit eben den Vortheilen bestimmen, welche die Differential-Rechnung darbiethet. Daraus und aus (16. 28. 30. §.) lassen sich sehr leicht die Regeln zur Exponentiirung logarithmischer und trigonometrischer Functionen, und der sogenannten Exponentialgrößen ableiten.

XII. Um den Gebrauch der Exponential-Rechnung zu erweitern, kann man nun den Weg umkehren, und aus den vorhergehenden Sätzen die Regeln zur Erfindung der Functionen aus gegebenen Exponentialien ableiten.

XIII. Man kann ferner höhere Exponentialien einführen. Das in (III.) erklärte Exponential εy mag das erste Exponential der Function y heißen. Und nun überhaupt jedes $(r+1)$te Exponential $\varepsilon^{r+1} y$ einer Function y, die sich auf die absolute veränderliche Größe x beziehen mag, soll das erste Exponential $\varepsilon \frac{\varepsilon^r y}{x}$ des Quotienten bedeuten, welcher entstehen würde, wenn man das nächst niedrigere rte Exponential von y durch x dividirte.

XIV. Dadurch setzt man sich in den Stand, die Exponentialien aller Ordnungen, welcher eine Function, sie mag algebraisch oder transcendentisch seyn, fähig ist, auf dem kürzesten Wege zu bestimmen.

XV. Wenn man $\varepsilon^2 y = \varepsilon \frac{\varepsilon y}{x}$, $\varepsilon^3 y = \varepsilon \frac{\varepsilon^2 y}{x}$, für $y = Mx^m$ nach (IX. XIII.) suchet, und das dabey bemerkte Gesetz für $\varepsilon^r y$ gelten läßt; so wird man finden nach (XIII. IX.), daß dasselbe Gesetz auch für $\varepsilon^{r+1} y$ gelten muß: hieraus aber wird man nach (I. Band. 54. §.) schließen, für jede wie immer große Zahl n müsse seyn:

$$E^n Mx^m = m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1) Mx^{m-n+1}.$$

XVI. Wenn man bey $y = Ax^a + Bx^b + Cx^c +$ etc. (I) $x + \omega$ statt x nimmt, und die Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt; so wird man finden, daß der Werth Y, welchen y dafür erlanget, sich, wegen (XV.), so ausdrücken läßt:

$$Y = y + \frac{\varepsilon y}{x}\omega + \frac{\varepsilon^2 y}{2x}\omega^2 + \frac{\varepsilon^3 y}{2.3x}\omega^3 + \cdots + \frac{\varepsilon^n y}{2.3..nx}\omega^n.$$

Mithin, für $x - \omega$ statt x bey y, wäre der neue Werth von y:

$$Y = y - \frac{\varepsilon y}{x}\omega + \frac{\varepsilon^2 y}{2x}\omega^2 - \frac{\varepsilon^3}{2.3x}\omega^3 + \cdots \pm \frac{\varepsilon^n y}{2.3...nx}\omega^n.$$

XVII. Um die Anwendbarkeit dieser Rechnung mehr auszudehnen, müßte man noch im Besitz einer sicheren Methode seyn, die Exponentialien unbekannter Functionen zu bestimmen: sie läßt sich mit Zuziehung der ersten Begriffe von Differenzen nach (XVI.) wirklich angeben, wie ichs am angezeigten Orte (33. §.) darthun werde.

35. §.

Vergleichet man die Erklärung eines Exponentials (34. §. III.) mit den Erklärungen der Exponential-Glei-

chungen

chungen (I. Band. 113. §. 1. 9. Zus.); so wird man so= gleich finden, daß die erste Exponential-Gleichung einer Hauptgleichung $Z=0$ nichts anders ist, als das Exponential von Z gleich Null gesetzt, nämlich $\varepsilon Z=0$: und weil jede höhere Exponential-Gleichung aus der nächst niedrigeren eben so entstehen soll, wie die erste Exponential-Gleichung $\varepsilon Z=0$ aus der Hauptgleichung $Z=0$ entstehet; so ist jede $(n+1)$te Exponential-Gleichung eigentlich nichts anders, als die erste Exponential-Gleichung der nten Exponential-Gleichung, als einer Hauptgleichung, dergestalt daß, wenn $X=0$ die nte Exponential-Gleichung von $Z=0$ bedeutete, die erste Exponential-Gleichung $\varepsilon X=0$ davon zugleich die $(n+1)$te von $Z=0$ seyn würde.

36. §.

Beym Beweise in (I. Band. 114. §.) kömmt alles darauf an, daß man darthue, die erste Exponential-Gleichung $\varepsilon Z=0$ (33. §.) einer Hauptgleichung $Z=0$ müsse durch $(x-\alpha)^{n-1}=0$ theilbar seyn, wenn $Z=0$ aus gleichen Wurzeln $\alpha, \alpha, \alpha \cdots \alpha$, n an der Zahl, bestehet, welches nun am kürzesten so geschehen kann.

Es ist gewiß, daß bey dieser Voraussetzung die Function Z dem Producte aus $(x-\alpha)^n$ in eine Function $X=x^r+ax^{r-1}+bx^{r-2}+\cdots+p$ von der Ordnung $r=m-n$ gleich seyn muß, wenn die Gleichung $Z=0$ von der Ordnung m ist: man kann also setzen:

$$Z=(x-\alpha)^n X, \text{ und so ist (34. §. VII. IX.)}.$$

$$\varepsilon Z=nxX(x-\alpha)^{n-1}+(x-\alpha)^n \varepsilon X.$$

Die

Die erste Exponential-Gleichung ist daher nach (35. §.)

$$\varepsilon Z = (nxX + (x - \alpha)\varepsilon X)(x - \alpha)^{n-1} = 0,$$

mithin gewiß durch $(x - \alpha)^{n-1}$ theilbar.

37. §.

Im ersten Bandes 121sten §. habe ich die Lehre von Exponential-Gleichungen auf die Entdeckung der Newtonschen Kennzeichen der unmöglichen Wurzeln angewandt, aber dieselben nur für einige erste Coefficienten bewiesen, wie dieses gewöhnlich geschieht, etwa beym Euler und Karsten, mit dem Unterschiede, daß diese sich dazu der Differential-Rechnung bedienen. Die Regeln, nach welchen man die unmöglichen Wurzeln einer Gleichung $y = 0$, der Newtonschen Angabe gemäß, zu beurtheilen pflegt, verdienen allerdings eine allgemeine Erörterung, welche ich demnach hier nachtragen will.

I. Sey eine Gleichung $y = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \dots + Qx^{m-r+1} + Rx^{m-r} + Sx^{m-r-1} + Tx^{m-r-2} + Ux^{m-r-3} + \dots + \psi = 0$ von der mten Ordnung.

II. Wenn man nun bey irgend einem Coefficienten A, B, C, D, etc. etwa beym rten R findet, daß das Quadrat R^2 desselben kleiner ist, als das Product aus dem nächst folgenden $(r+1)$ten S in den nächst vorhergehenden $(r-1)$ten Q multiplicirt mit dem Bruche $\frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r}$, nämlich:

$$R^2 < \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ;$$

so wird dieses ein untrügliches Zeichen seyn, daß die Gleichung $y=0$ wenigstens ein Paar unmöglicher Wurzeln hat.

III. Doch, wenn das Kennzeichen II) bey keinem Coefficienten A, B, C, D, etc. Statt findet, wird dieses noch nicht beweisen, daß die Gleichung I) keine unmöglichen Wurzeln hat.

IV. Aus zweyen unmittelbar auf einander folgenden Kennzeichen der unmöglichen Wurzeln, etwa welche bey dem r ten Coefficienten R, und dem $(r+1)$ten S der Gleichung I) nach II) vorkommen mögen, folgt nicht mehr, als aus einem Kennzeichen folgen würde: aus beyden kann man nämlich nur auf ein Paar unmöglicher Wurzeln von $y=0$ schließen.

V. Kommen hingegen mehrere Kennzeichen in einer unterbrochenen Ordnung vor, etwa beym r ten Coefficienten R, und beym $(r+2)$ten T, aber nicht auch beym $(r+1)$ten S; so kann man aus jedem Kennzeichen auf ein neues Paar unmöglicher Wurzeln der Gleichung $y=0$ in I) schließen.

Dieses sind die allgemeinen Sätze, aus welchen sich die in (I. Band. 121. §.) vorgeschriebenen Regeln ergeben, und die ich nun eben so allgemein zu beweisen suchen werde.

38. §.

1. Die gegebene Gleichung von der mten Ordnung sey, wie oben.

$$y=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+\dots$$
$$+Qx^{m-r+1}+Rx^{m-r}+Sx^{m-r-1}+Tx^{m-r-2}+Ux^{m-r-3}$$
$$+\dots\psi=0.$$

2. Man

2. Man setze $x = \frac{1}{z}$ in (1), sodann multiplicire man die ganze Gleichung $y = 0$ mit z^m; so wird sie in folgende übergehen.

$$X = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Qz^{r-1} + Rz^r$$
$$+ Sz^{r+1} + Tz^{r+2} + Uz^{r+3} + \ldots + \psi z^m = 0.$$

3. Weil jede Wurzel z der Gleichung $X = 0$ in (2) eine Wurzel $x = \frac{1}{z}$ der Gleichung $y = 0$ in (1) giebt; so muß für jedes Paar unmöglicher Wurzeln der Gleichung $X = 0$ auch die Gleichung $y = 0$ ein Paar unmöglicher Wurzeln haben: und wenn alle Wurzeln der Gleichung $y = 0$ in (1), oder $X = 0$ in (2) möglich sind; so müssen auch alle Wurzeln der Gleichung $X = 0$ im ersten Fall, oder $y = 0$ im zweyten Fall möglich seyn.

4. Die erste Exponential-Gleichung von (2) ist nach (35. 34. §. III.) $Az + 2Bz^2 + 3Cz^3 + \ldots + m\psi z^m = 0$, oder

$$A + 2Bz + 3Cz^2 + \ldots + m\psi z^{m-1} = 0.$$

Daher ist die zweyte Exponential-Gleichung von (2) nach (35. 34. §. III.) $2Bz + 3.2Cz^2 + \ldots + m(m-1)\psi z^{m-1} = 0$, demnach.

$$2B + 3.2Cz + \ldots + m(m-1)\psi z^{m-2} = 0.$$

Die dritte Exponential-Gleichung von 2) ist nun nach (35. 34. §. III.) $3.2.1.Cz + \ldots + m(m-1)(m-2)\psi z^{m-2} = 0$, daher

$$3.2.1.C + \ldots + m(m-1)(m-2)\psi z^{m-3} = 0.$$

5. Hätte man zu den Exponential-Gleichungen in (4) mehrere Glieder der Hauptgleichung $X = 0$ in (2) genom-

 men;

men; so würde das bey ihnen herrschende Gesetz einleuchtender gewesen seyn: gälte dieses Gesetz für die (r — 1)te Exponential-Gleichung von X=0 in (2); so wäre

die (r — 1)te Exponential-Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}(r-1)(r-2)(r-3)\text{------}5.4.3.2.1.Q\\ +r(r-1)(r-2)(r-3)\text{-----}5.4.3.2.2.Rz\\ +(r+1)r(r-1)(r-2)\text{-----}5.4.3.Sz^2\\ +(r+2)(r+1)r(r-1)(r-2)\text{----}5.4.Tz^3\\ +(r+3)(r+2)(r+1)r(r-1)\text{----}5.Uz^4\\ \qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\\ +m(m-1)(m-2)\text{----}(m-r+2)\psi z^{m-r+1}\end{array}\right\}=0.$$

Und hieraus fände man die r te Exponential Gleichung nach (35. 34. § III.), wie folgt:

die rte Exponential-Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}r(r-1)(r-2)(r-3)\text{-----}5.4.3.2.1.R\\ +(r+1)r(r-1)(r-2)\text{-----}5.4.3.2.Sz\\ +(r+2)(r+1)r(r-1)(r-2)\text{---}5.4.3.Tz^2\\ +(r+3)(r+2)(r+1)r(r-1)\text{----}5.4.Uz^3\\ \qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\\ +m(m-1)(m-2)\text{ - - - }(m-r+1)\psi z^{m-r}\end{array}\right\}=0.$$

Daraus erhellet nun, daß das bey den drey ersten Exponential-Gleichungen in (4) herrschende Gesetz, sobald man es für irgend eine (r — 1) te Exponential-Gleichung gelten läßt, auch für die nächst höhere r te Exponential-Gleichung gelten muß. Dasselbe gilt also für alle Exponential-Gleichungen der Hauptgleichung X=0 in (2) nach (1. Band. 54. §.). Demnach erhält man für X=0 in (2) nach (35. 34. §. III.) aus der nächst vorhergehenden rten.

die

die (r+1) te Exponential-Gleichung.

$$\left.\begin{array}{l}(r+1)r(r-1)(r-2)(r-3)\cdots 5.4.3.2.1.S\\ +(r+2)(r+1)r(r-1)(r-2)\cdots 5.4.3.2.Tz\\ +(r+3)(r+2)(r+1)r(r-1)\cdots 5.4.3.Uz^2\\ \quad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}\\ +m(m-1)(m-2)\cdots(m-r)\psi z^{m-r-1}\end{array}\right\}=0.$$

6. Wenn man jede Exponential-Gleichung in (5) durch ihr erstes Glied dividirt; so erhält man aus (5) folgende drey Gleichungen.

$$1+\frac{rR}{Q}z+\frac{(r+1)rS}{2Q}z^2+\frac{(r+2)(r+1)rT}{3.2Q}z^3$$
$$+\frac{(r+3)(r+2)(r+1)rU}{4.3.2Q}z^4+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+2)\psi}{(r-1)(r-2)\cdots 4.3.2.1.Q}z^{m-r+1}=0.$$

$$1+\frac{(r+1)S}{R}z+\frac{(r+2)(r+1)T}{2R}z^2$$
$$+\frac{(r+3)(r+2)(r+1)U}{3.2R}z^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)\psi}{r(r-1)(r-2)\cdots 4.3.2.1.R}z^{m-r}=0.$$

$$1+\frac{(r+2)T}{S}z+\frac{(r+3)(r+2)U}{2S}z^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r)\psi}{(r+1)r(r-1)\cdots 4.3.2.1.S}z^{m-r-1}=0.$$

7. Ferner bezeichne man die Coefficienten der Gleichungen in (6) mit einzelnen Buchstaben auf diese Art.

$$\alpha=\frac{rR}{Q};\ \beta=\frac{(r+1)rS}{2Q};\ \gamma=\frac{(r+2)(r+1)rT}{3.2Q};$$

$$\delta=\frac{(r+3)(r+2)(r+1)rU}{4.3.2.Q};\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$\mu=\frac{m(m-1)(m-2)\ -\ -\ -\ (m-r+2)\psi}{(r-1)(r-2)\ -\ -\ -\ -\ -\ 4.3.2.1.Q}.$$

$$a=\frac{(r+1)S}{R};\ b=\frac{(r+2)(r+1)T}{2R};$$

$$c=\frac{(r+3)(r+2)(r+1)U}{3.2.R};\ -\ -\ -\ -\ -$$

$$u=\frac{m(m-1)(m-2)\ -\ -\ -\ (m-r+1)\psi}{r(r-1)(r-2)\ -\ -\ -\ -\ 4.3.2.R}.$$

$$\mathfrak{A}=\frac{(r+2)T}{S};\ \mathfrak{B}=\frac{(r+3)(r+2)U}{2S};$$

$$-\ -\ -\ -\ \mathfrak{S}=\frac{m(m-1)\ -\ -\ -\ (m-r)\psi}{(r+1)r(r-1)\ -\ -\ -\ 4.3.2.S}.$$

Ueberdem sey $m-r+1=n$, mithin $m-r=n-1$, und $m-r-1=n-2$.

Für diese Bezeichnungen wird man aus (6) folgende Exponential-Gleichungen für die Hauptgleichung $X=0$ in (2) erhalten.

Die $(r-1)$te.

$$1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\ -\ -\ -\ +\mu z^n=0.$$

Die $r$te.

$$1+az+bz^2+cz^3+\ -\ -\ -\ -\ -\ +uz^{n-1}=0.$$

Die $(r+1)$te

$$1+\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2+\ -\ -\ -\ -\ +\mathfrak{S}z^{n-2}=0.$$

8. Hätte

8. Hätte man die Hauptgleichung $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{- - -} + Lx^r + Mx^{r-1} + \text{- - -} + Rx^2 + Sx + T = 0$; so wäre ihre $(m-2)$te Exponential-Gleichung

$$x^2 + \frac{2A}{m}x + \frac{2B}{m(m-1)} = 0.$$

9. Denn aus der Hauptgleichung (8) erhält man die Gleichung $1 + \frac{S}{T}x + \frac{R}{T}x^2 + \text{- - -} + \frac{L}{T}x^r + \frac{K}{T}x^{r+1}$

$$+ \frac{I}{T}x^{r+2} + \text{- - -} + \frac{B}{T}x^{m-2} + \frac{A}{T}x^{m-1} + \frac{1}{T}x^m = 0;$$

also ist überhaupt ihre

rte Exponential-Gleichung nach (5)

$$\left.\begin{array}{l} r(r-1)(r-2)\text{ - - - } 5.4.3.2.1.\frac{L}{T} \\ +(r+1)r(r-1)(r-2)\text{ - - - } 5.4.3.2.\frac{K}{T}x \\ +(r+2)(r+1)r(r-1)\text{ - - - } 5.4.3.\frac{I}{T}x^2 \\ \quad\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\ +m(m-1)\text{ - - - }(m-r+1).\frac{1}{T}x^{m-r} \end{array}\right\} = 0.$$

Wenn man demnach bey diesem Ausdrucke $r = m-2$ setzt; so wird er die $(m-2)$te Exponential-Gleichung geben: aber für $r = m-2$ müssen die Coefficienten $\frac{L}{T}, \frac{K}{T}, \frac{I}{T}$, in $\frac{B}{T}, \frac{A}{T}, \frac{1}{T}$ übergehen; daher ist die $(m-2)$te Exponential-Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} (m-2)(m-3) - - - - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{B}{T} \\ + (m-1)(m-2) - - - - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{A}{T} x \\ + m(m-1) - - - - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{T} x^2 \end{array}\right\} = 0.$$

mithin $x^2 + \frac{2A}{m} x + \frac{2B}{m(m-1)} = 0$, wie in (8).

10. Setzt man nun $z = \frac{1}{x}$ in (7); so gehen die dortigen Exponential-Gleichungen in folgende über.

$$x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \delta x^{n-4} + - - - + \mu = 0.$$

$$x^{n-1} + a x^{n-2} + b x^{n-3} + c x^{n-4} + - - - - + u = 0.$$

$$x^{n-2} + \mathfrak{A} x^{n-3} + \mathfrak{B} x^{n-4} + - - - + \mathfrak{S} = 0.$$

11. Für $m = n$ in (8) erhält man aus der ersten Hauptgleichung in (10) ihre $(n-2)$te Exponential-Gleichung.

$$x^2 + \frac{2\alpha}{n} x + \frac{2\beta}{n(n-1)} = 0.$$

12. Für $m = n - 1$ findet man ferner aus der zweyten Hauptgleichung in (10) ihre $(n-3)$te Exponential-Gleichung nach (8).

$$x^2 + \frac{2a}{n-1} x + \frac{2b}{(n-1)(n-2)} = 0.$$

13. Und für $m = n - 2$ erhält man aus der dritten Hauptgleichung in (10) ihre $(n-4)$te Exponential-Gleichung.

$$x^2 + \frac{2\mathfrak{A}}{n-2} x + \frac{2\mathfrak{B}}{(n-2)(n-3)} = 0.$$

14. Ich will nun annehmen, daß alle Wurzeln der Hauptgleichung $y=0$ in (1) möglich sind: so müssen auch alle Wurzeln der Gleichung $X=0$ in (2) möglich seyn, nach (3); und nun sind auch alle Wurzeln der Exponential-Gleichungen in (7) möglich (I. Band. 113. §. 10. Zusatz); und weil für jede Wurzeln in (7) eine $x=\frac{1}{z}$ in (10) bestimmt wird; so werden auch alle Wurzeln der Gleichungen in (10), daher auch alle Wurzeln ihrer Exponential-Gleichungen in 11) 12) 13) möglich seyn: in (11) muß also seyn:

$$\frac{\alpha^2}{n^2} > \frac{2\beta}{n(n-1)}, \text{ oder } \frac{\alpha^2}{n^2} = \frac{2\beta}{n(n-1)};$$

mithin

$$\alpha^2 > \frac{2n\beta}{n-1}, \text{ oder } \alpha^2 = \frac{2n\beta}{n-1};$$

also nach (7)

$$R^2 > \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ.$$

$$\text{oder } R^2 = \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ.$$

Nimmt man hingegen an, es sey

$$R^2 < \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ;$$

so ist auch

$$\frac{r^2R^2}{(m-r+1)^2Q^2} < \frac{2(r+1)rS}{2(m-r)(m-r+1)Q}.$$

daher nach (7)

$$\frac{\alpha^2}{n^2} < \frac{2\beta}{n(n-1)}.$$

Bey dieser Voraussetzung muß die quadratische Gleichung in (11) unmögliche Wurzeln haben: also hat auch die erste Gleichung in (10) ein Paar unmöglicher Wurzeln (I. Band. 113. §. 8. 10. Zus.) Weil ferner für jede Wurzel x der ersten Gleichung in (10) eine Wurzel $z = \frac{1}{x}$ der ersten Gleichung in (7) bestimmt wird; so hat auch die erste Gleichung in (7) ein Paar unmöglicher Wurzeln. Und hieraus folgt ferner, daß auch die Hauptgleichung $X = 0$ in (2) ein Paar unmöglicher Wurzeln haben muß (I. B. 113. §. 8. 10. Zusatz), mithin auch die Hauptgleichung $y = 0$ in (2) nach (3).

Dies war demnach der allgemeine Beweis des Satzes II) in (37. §.)

15. Ferner nehme man an, daß bey keinem (rten) Coefficienten R der Gleichung $y = 0$ in (1) das Kennzeichen unmöglicher Wurzeln (37. §. II) Statt findet, daß vielmehr

$$\text{entweder } R^2 > \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ$$

$$\text{oder } R^2 = \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ$$

ist; so folgt hieraus nichts mehr, als daß auch

$$\frac{\alpha^2}{n^2} > \frac{2\beta}{n(n-1)}, \text{ oder } \frac{\alpha^2}{n^2} = \frac{2\beta}{n(n-1)}$$

wie in (14) seyn muß, daß demnach beyde Wurzeln der quadratischen Gleichung in (11) möglich sind: da aber die Exponential-Gleichung in (11) der ersten Hauptgleichung in (10) mögliche Wurzeln haben kann, wenn gleich diese Haupt-

gleichung unmögliche Wurzeln hat, (I. Band. 113. §. 7. 10. Zusatz) und demnach alle, oder einige Wurzeln der ersten Gleichung in (7), folglich auch der Gleichungen in (2) 1) unmöglich sind (I. Band 113. §. 8. 10. Zus.); so ist offenbar, daß man nicht behaupten kann, es seyen alle Wurzeln der Gleichung $y=0$ möglich, sobald das in (37. §. II.) erklärte Kennzeichen bey keinem Coefficienten Statt findet, welches zum Beweise des Satzes III) in (37. §.) dient.

16. Nun nehmen wir an, daß die Kennzeichen unmöglicher Wurzeln der Gleichung $y=0$ nach (37. §. II.) bey zweenen unbestimmten unmittelbar auf einander folgenden Coefficienten, dem rten R, und (r+1)ten S, wirklich Statt finden, dergestalt, daß

$$\text{sowohl } R^2 < \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} \cdot SQ$$

$$\text{als } S^2 < \frac{(m-r)(r+2)}{(m-r-1)(r+1)} \cdot RT$$

sey. Aus diesen beyden Kennzeichen soll nun nach (37. §. IV.) nicht auf mehr als ein Paar unmöglicher Wurzeln der Gleichung $y=0$ in (1) zu schließen gestattet seyn. Denn aus ihnen folgt nur, daß wegen (7)

$$\text{sowohl I. } \frac{\alpha^2}{n^2} < \frac{2\beta}{n(n-1)},$$

$$\text{als II. } \frac{a^2}{(n-1)^2} < \frac{2b}{(n-1)(n-2)} \text{ ist.}$$

Nun giebt I) zwo unmögliche Wurzeln für die quadratische Gleichung in (11), woraus folgt, daß auch die erste Gleichuug in (10) zwo unmögliche Wurzeln hat. (I. Band. 113. §. 8. 10. Zusatz.)

Ferner

Ferner giebt II) zwo unmögliche Wurzeln für die quadratische Gleichung in (12), und hieraus folgt, daß auch die zweyte Gleichung in (10) zwo unmögliche Wurzeln hat. (I. Band. 113. §. 8. 10. Zusatz.)

Da also für jede Wurzel x der ersten oder zweyten Gleichung in (10) eine Wurzel $z = \frac{1}{x}$ der ersten oder zweyten Gleichung in (7) entstehet; so folgt aus I) daß die erste Gleichung in (7), und aus II) erhellet, daß die zweyte Gleichung in (7) zwo unmögliche Wurzeln hat. Weil aber die zweyte Gleichung in (7) die erste Exponential-Gleichung der ersten Gleichung in (7) ist (35. §.); so folgt auch aus II), daß die erste Gleichung in 7) ein Paar unmöglicher Wurzeln hat. (I. Band. 113. §. 8. Zusatz.)

Gewiß ist es also, daß die erste Gleichung in (7) sowohl wegen I), als wegen II) ein Paar unmöglicher Wurzeln haben muß: hieraus folgt aber noch nicht, daß dasjenige Paar unmöglicher Wurzeln der ersten Gleichung in (7), wovon das Kennzeichen in I) seyn soll, von jenem Paar, wovon II) das Kennzeichen ist, wirklich unterschieden ist; es ist vielmehr ganz gewiß, daß jenes mit diesem einerley ist. Denn sonst könnte die erste Gleichung in (7) vier unmögliche Wurzeln haben, und zwar für jede ganze bejahte Zahl $n > 2$, mithin auch für $n = 3$, welches nicht seyn kann. (I. Band. 96. §.) Aus den beyden Bedingungen I) II) darf man also nur auf ein Paar unmöglicher Wurzeln der ersten Gleichung in (7) schließen, mithin auch nur auf ein Paar solcher Wurzeln der Gleichung $X = 0$ in (2) nach (I. Band. 113. §. 8. 10. Zusatz.), folglich auch nur auf ein

Paar

Paar unmöglicher Wurzeln der Hauptgleichung $y=0$ in (1) nach (3).

17. Endlich nehme man an, daß die Kennzeichen der unmöglichen Wurzeln der Gleichung $y=0$ in (1) nach (37. §. II.) bey zwenen unbestimmten und in einer unterbrochenen Ordnung auf einander folgenden Coefficienten, etwa dem rten R, und (r + 2)ten T, Statt finden, so daß

$$\text{sowohl } R^2 < \frac{(m-r+1)(r+1)}{(m-r)r} SQ,$$

$$\text{als } T^2 < \frac{(m-r-1)(r+3)}{(m-r-2)(r+2)} \cdot SU \text{ ist.}$$

Diese beyden Kennzeichen sollen nun zum Beweise dienen, daß die Gleichung $y=0$ gewiß zwey Paare unmöglicher Wurzeln hat, welches zum Beweise des Satzes V) in (37. §.) dienen mag.

Denn daraus folgt nothwendig, daß, wegen (7) auch

$$\text{I. } \frac{\alpha^2}{n^2} < \frac{2\beta}{n(n-1)}$$

$$\text{und II. } \frac{\mathfrak{A}}{(n-2)^2} < \frac{2\mathfrak{B}}{(n-2)(n-3)}$$

seyn muß, daß demnach die beyden Wurzeln sowohl der quadratischen Gleichung in (11) als der in (13) unmöglich sind, es mag n was immer für eine ganze bejahte Zahl > 3 seyn. Da also hieraus weiter folgt, daß sowohl die erste, als die dritte Gleichung in (10) wenigstens ein Paar unmöglicher Wurzeln hat (I. Band 113. §. 8. 10. Zusatz.), folglich, weil jede Wurzel x in (10) eine z in (7) geben

soll,

soll, auch sowohl die erste, als die dritte Gleichung in (7) ein Paar unmöglicher Wurzeln haben muß: so kann man aus den beyden Bedingungen I) II) mit Gewißheit schließen, daß die erste Gleichung in (7) wegen der Bedingung I), und die dritte Gleichung in (7) wegen der Bedingung II) ein Paar unmöglicher Wurzeln hat. Nun aber ist die dritte Gleichung in (7) im Grunde die zweyte Exponential-Gleichung der ersten Gleichung in (7) nach (35. §.), folglich muß die erste Gleichung in (7) schon deswegen ein Paar unmöglicher Wurzeln haben, weil es die dritte Gleichung in (7) hat (I. Band. 113. §. 8. 10. Zusatz.): aus den beyden oben für R, T, aufgestellten Kennzeichen folgt also, daß die erste Gleichung in (7) vielleicht zwey von einander unterschiedene Paare unmöglicher Wurzeln hat; daß sie aber solche wirklich haben muß, erhellet so: Zuerst muß n in (7) wenigstens =4, mithin die erste Gleichung in (7) wenigstens von der 4ten Ordnung seyn, und eine Gleichung von der 4ten Ordnung kann wohl 4 unmögliche Wurzeln haben. Weil ferner die Coefficienten einer Gleichung gewiß von ihren Wurzeln nach bestimmten Gesetzen abhängen, und x, $\mathfrak{A}$, wegen (7) durch verschiedene Coefficienten der Hauptgleichung $y=0$ bestimmt sind, so müssen auch die unmöglichen Wurzeln der ersten Gleichung in (7), welche sie wegen I) haben soll, von jenen, die sie wegen II) hat, unterschieden seyn. Hat aber die erste Gleichung in (7) zwey Paare unmöglicher Wurzeln; so muß solche auch die Gleichung $X=0$ in (2 nach (I. Band. 113. §. 8. 10. Zusatz), mithin auch die Gleichung $y=0$ in (1) nach (3) haben.

39. §.

Zum Beschluß dieses Abschnittes will ich nun einige Stellen im ersten Bande berichtigen.

Das Beyspiel in (I. Band. 94. §.) ist fehlerhaft, und muß folgendermaßen verbessert werden.

$$Z = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$$

Für $x = \sqrt{-1}$ $\quad Z = 1 - \sqrt{-1} + 5 + \sqrt{-1} - 6 = 0$

Für $x = -\sqrt{-1}$ $\quad Z = 1 + \sqrt{-1} + 5 - \sqrt{1} - 6 = 0$

Für $x = 2$ $\quad Z = 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0$

Für $x = -3$ $\quad Z = 81 - 27 - 45 - 3 - 6 = 0$

Daher auch bey demselben §. auf der 247sten Seite muß stehen: $Z = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$.

Auf der 255sten Seite soll $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$ statt $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ stehen.

Auf der 260sten Seite auf der 12ten Zeile lese man gerade oder ungerade, statt ungerade oder gerade.

Auf der 265sten Seite, 14. 15. 16. Zeile lese man, das entgegengesetzte Zeichen, daher (—) und der (r+1)te Coefficient T das eigene, daher (+) vor sich, anstatt: sein eigenes Zeichen, daher (+), und der (r+1)te Coefficient T das entgegengesetzte, daher (—) vor sich.

Auf der 267sten Seite, 2. 4. Zeile lese man, verneint seyn, und bejaht seyn, statt bejaht seyn, und verneint seyn.

Auf derselben Seite 8. Zeile lese man, allemahl bejaht, statt allemahl verneint.

Daselbst 10. Zeile statt: und es ist dasselbe rc. bis zu Ende, lese man: und es ist dasselbe Glied allemahl verneint

verneint, wenn die Anzahl der verneinten Wurzeln ungerad ist.

Auf der 269sten Seite ist das erste Beyspiel fehlerhaft, welches daher muß so verbessert werden.

$$\begin{array}{rcl} x^4 = & y^4 - 20y^3 + 150y^2 - 500y + 625 \\ 2x^3 = & 2y^3 - 30y^2 + 150y - 250 \\ -13x^2 = & -13y^2 + 130y - 325 \\ -14x = & -14y + 70 \\ +24 = & +24 \\ \hline & y^4 - 18y^3 + 107y^2 - 234y + 144 = 0 \end{array}$$

Mit Recht wird in 123. §. 2. Zus. bemerkt, daß das daselbst erklärte Verfahren keinesweges vortheilhaft seyn kann, wofern die gegebene Gleichung nicht von einem hohen Grad ist: ich setze noch hinzu, daß es überhaupt nicht viel nutzet, und statt dessen man sich der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe mit größerem Vortheil bedienen wird. Indessen merke man sich, daß bey jenem Verfahren überall die nach der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe vorzunehmende Division verstanden werden muß, welches bey demselben Zusatze nicht stehet. Dabey ist die Auflösung des zweyten Beyspiels fehlerhaft, und man muß sie so verbessern.

Dividirt man $L^2 = 0$ durch $L^3 = 0$; so erhält man den Quotienten $4x - 5 = 0$, und den Rest $-\frac{3}{4}$: daher dividire man $L = 0$ durch $L^2 = 0$. Da nun diese Division einen Rest $= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ giebt; so versuche man $L^2 = 0$ durch denselben Rest zu dividiren: diese Division geschieht ohne Rest; daher bestehet $L^2 = 0$ aus dem Factor $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$, oder $x - 1 = 0$, $L = 0$ aber aus dem

Factor

Factor $(x-1)^2=0$, und $Z=0$ aus dem Factor $(x-1)^3=0$, welcher also drey gleiche Wurzeln, jede $x=1$, für die Gleichung $Z=0$ giebt.

Im 126. §. beym ersten Beyspiele, auf der 374sten Seite, ist $8+\frac{88}{8}+\frac{128}{8^3}-\frac{192}{8^2}>16$, nicht aber <16; mithin werden alle Glieder der dortigen Gleichung $X=0$ für $\alpha=8$ bejaht seyn: folglich liegen alle bejahte Wurzeln von $Z=0$ zwischen 0 und 8.

Der Schluß beym Beyspiele in 126. §. 2. Zus. ist fehlerhaft: denn die neue Gleichung $X=0$ ist so beschaffen, daß für $\alpha=2$ das zweyte Glied verneint bleibt, und alle übrigen Glieder bejaht werden müssen: also muß die Gleichung $X=0$ zwo bejahte Wurzeln, und eine verneinte $y=x-\alpha$ haben (I. Band. 120. §. 2. Zus.), woraus doch erhellet, daß $\alpha=2$ größer ist, als eine bejahte Wurzel von $Z=0$.

Daher muß man daselbst auf der 383sten Seite, beym dortigen Beyspiele den Schluß, daß alle bejahte Wurzeln der Gleichung $x^3-15x^2+63x-50=0$ zwischen 1 und 2 liegen, in diesen verwandeln, daß eine bejahte Wurzel der Gleichung $x^3-15x^2+63x-50=0$ zwischen 1 und 2 liegt.

Der II. Abschnitt.

Von den ersten Gründen der Differential-Rechnung, insofern sie sich als ein Theil der Analysis endlicher Größen betrachten läßt; nebst Erweiterung der im zweyten Bande enthaltenen Integral-Rechnung.

40. §.

Erklärung.

Der Umstand, daß jede Function eine veränderliche Größe ist, veranlasset die Eintheilung der veränderlichen Größen in absolute oder unabhängige, und respective oder abhängige. Jede Function ist eine respective oder abhängige veränderliche Größe, insofern ihre Veränderungen abhängig von den möglichen Veränderungen der bey ihr vorhandenen veränderlichen Größen betrachtet werden; hingegen soll sich jede Function auf eine oder mehrere absolute oder unabhängige veränderliche Grössen beziehen, welche nämlich unabhängig von andern veränderlichen Größen, als in sich veränderlich betrachtet werden.

Z. B. Wenn y die Ordinate, x die Absciſſe, vom Endpunkte des Durchmessers gerechnet, und r den Halbmesser einer Kreislinie bedeutet; so kann man die Absciſſe x als eine absolute veränderliche Größe betrachten, der man nach Belieben was immer für Werthe beylegen kann: die Ordinate y wird nun eine Function davon seyn, nämlich $y = \sqrt{(2rx-x^2)}$, welche als eine von x abhängige veränderliche Größe angesehen wird. Man kann aber die Untersuchung umkeh-

umkehren, und zu wissen verlangen, wie sich die Abscisse x ändern muß, wenn man sich bey der Ordinate y gewisse Aenderungen denkt: dabey würde man y als eine absolute oder unabhängige, und $x=r\pm\sqrt{(r^2-y^2)}$ als eine Function, oder eine von ihr abhängige veränderliche Größe betrachten.

41. §.

Erklärung. Wenn man sich vorstellt, die absolute veränderliche Größe x, auf welche eine Function y sich beziehen mag, nehme um irgend eine Größe zu; so muß sich die Function y selbst ändern, nämlich zu- oder abnehmen: diejenige Größe, um welche x zunimmt, heißt die **Differenz der absoluten veränderlichen Größe x**: und diejenige Größe, um welche sich die Function y ändern mag, sobald x um eine Differenz wächst, wird die **Differenz der Function y** genannt: beyde können überhaupt mit Δx, Δy bezeichnet werden.

42. §.

1. Zusatz. Will man die Differenz Δy einer Function y haben, welche einer gewissen Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe x, worauf y sich bezieht (40. §.), zugehören mag; so stelle man sich vor, x gehe in $x+\Delta x$ über; suche hierauf den Werth y^1, welchen y dafür erlangen mag, und ziehe davon die Function y selbst ab: daher setze man $\Delta y = y^1 - y$, vergesse aber nicht, $y^1 - y$ mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen, wenn die Function y von der Beschaffenheit ist, daß sie bey zunehmender veränderlicher Größe x abnimmt. (41. §. und II. Band. 3. §. 1. 2. Zus.)

43. §.

2. Zusatz. Eine beständige Größe C ist keiner Differenz fähig (41. §.): in dieser Bedeutung wird $\Delta C = 0$ gesetzt.

44. §.

3. Zusatz. Wenn C eine beständige Größe, und Z was immer für eine Function von einer absoluten veränderlichen Größe x ist; so muß seyn $\Delta y = \Delta Z$ für $y = Z + C$, und $\Delta y = C \Delta Z$ für $y = Cz$ (41. 42. §.), nach (II. Band. 5. §. 5. 7. Zus.).

45. §.

4. Zusatz. Und für die Summe $y = P + Q + R + \cdots + Z$ mehrerer Functionen von einer absoluten veränderlichen Größe x ist $\Delta y = \Delta P + \Delta Q + \Delta R + \cdots + \Delta Z$ (41. 42. §.) nach (II. Band. 3. §. 6. Zus.)

46. §.

5. Zusatz. Die Differenzen zwoer gleichen Functionen X, Z von einer absoluten veränderlichen Größe x müssen einander gleich seyn, nämlich $\Delta X = \Delta Z$, für $X = Z$ (41. 42. §.), nach (II. Band. 3. §. 5. Zus.)

47. §.

6. Zusatz. Die Differenz Δx einer absoluten veränderlichen Größe x hat keinen bestimmten Werth (41. §.): man kann sie also wie jede andere veränderliche Größe behandeln: man kann sich einbilden, daß Δx bey einer Function von Δx, allmählich abnimmt, dergestalt, daß Δx nach und nach die Werthe $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{4}x$, $\frac{1}{5}x$, - - - $\frac{1}{100}x$, $\frac{1}{101}x$, $\frac{1}{102}x$, u. s. f. erlanget, wenn es daran gelegen ist, zu wissen,

wissen, welche Werthe dafür die Function von Δx erhalten würde: man kann auch $\Delta x = 0$ setzen, wenn man zu wissen verlangt, was für einen Werth die gegebene Function von Δx erhalten würde, wenn Δx verschwände.

48. §.

Erklärung. Eine sich allmählich ändernde (zu- oder abnehmende) Größe Z nähert sich einem bestimmten Werthe U, wenn der Unterschied zwischen ihr und diesem Werthe allmählich kleiner wird, und wenn er kleiner werden kann, als jede wie immer kleine denkbare gleichartige Größe; so heißt U die Gränze der sich ändernden Größe Z.

49. §.

Zusatz. Hätte man $\omega = P + Q\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x^3 + \text{etc.}$ eine Function von der Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe x, wobey P, Q, R, S, etc. gewisse von Δx unabhängige Größen bedeuten mögen, so könnte man sich vorstellen, Δx nähme nach (47. §.) beständig ab: dabey würde der Unterschied $Q\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x^3 + \text{etc.}$ zwischen ω und P allmählich kleiner werden; ja er kann kleiner werden, als jede wie immer kleine denkbare gleichartige Größe μ (3. §.): wenn also Δx beständig abnimmt; so nähert sich ω dem bestimmten Werthe P, der zugleich die Gränze aller Werthe ist, welche ω wegen der unaufhörlichen Abnahme von Δx nach und nach erhalten kann (48. §.)

50. §.

Erklärung. Wenn ein veränderliches Verhältniß Z : 1 sich allmählich ändert, zu- oder abnimmt; so nähert

sich dasselbe einem bestimmten Verhältnisse U : 1, wenn der Unterschied zwischen ihm und diesem Verhältnisse allmählich kleiner wird: es ist auch U : 1 die Gränze des sich ändernden Verhältnisses Z : 1, wenn es möglich ist, daß der Unterschied dieser Verhältnisse kleiner werde, als ein wie immer kleines denkbare Verhältniß u : 1.

51. §.

Zusatz. Es erhellet aus bekannten Gründen, daß der Unterschied zwischen den Verhältnissen Z : 1 und P : 1 desto kleiner seyn muß, je kleiner ist der Unterschied zwischen ihren vorderen Gliedern Z, P: so wie also, für $Z = P + Q\Delta x + R\Delta x^2 + S\Delta x^3 +$ etc., der Unterschied zwischen Z und P, wenn Δx nach (47. §.) beständig abnimmt, kleiner werden kann, als jede wie immer kleine denkbare gleichartige Größe p, welches macht, daß P die Gränze der sich, wegen der unaufhörlichen Abnahme von Δx, allmählich ändernden Größe Z ist (49. §.); eben so kann der Unterschied zwischen den Verhältnissen Z : 1 und P : 1 kleiner werden, als jedes wie immer kleine denkbare Verhältniß p : 1, welches macht, daß P : 1 die Gränze des sich, wegen der unaufhörlichen Abnahme von Δx, allmählich ändernden Verhältnisses Z : 1 ist (50. §.)

52. §.

Erklärung. Jeder bestimmte Werth, welchen das Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ der Differenz einer Function y gegen die Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe x, worauf sie sich bezieht, oder die Gränze haben mag, welcher dasselbe Verhältniß, wenn Δx allmählich abnähme, etwa nach (47. §.),

sich

sich nähern würde, kann man das Differential-Verhältniß der Function y nennen, und den Exponenten davon mit dy bezeichnen. Die Erfindung der Differential-Verhältnisse ist der Gegenstand der Differential-Rechnung; und die Erfindung der Functionen, deren Differential-Verhältnisse bekannt sind, ist der Gegenstand der Integral-Rechnung.

53. §.

1. Zusatz. In der Bedeutung, in welcher die Differenz einer beständigen Größe C gleich Null gesetzt wird (43. §), muß auch der Exponent ihres Differential-Verhältnisses gleich Null seyn (52. §.)

54. §.

2. Zusatz. Für $y = ax$ wäre $\Delta y = a\Delta x$ (44. §.): also hätte das Verhältniß $\Delta y : \Delta x = a : 1$ einen durch a bestimmten Werth. Dies ist daher das Differential-Verhältniß von $y = ax$, und der Exponent davon $dy = a$ (52. §.).

55. §.

2. Zusatz. Daher, für $a = 1$, wäre $y = x$ und $\Delta y : \Delta x = 1 : 1$ das Differentialverhältniß der absoluten veränderlichen Größe x, sein Exponent aber $dy = dx = 1$ (54. §.), eine abstracte Einheit, in der Bedeutung, in welcher der Exponent eines Verhältnisses überhaupt eine abstracte Zahl ist.

56. §.

3. Zusatz. Ist eine Function y von der absoluten veränderlichen Größe x so beschaffen, daß für gewisse von Δx

unabhängige Größen K, L, M, N, etc. ihre Differenz $\Delta y = K\Delta x + L\Delta x^2 + M\Delta x^3 + N\Delta x^4 + \text{etc.}$ ist; so muß $\Delta y : \Delta x = (K + L\Delta x + M\Delta x^2 + N\Delta x^3 + \text{etc.}) : 1$, mithin $K : 1$ das Differentialverhältniß von y (51. 52. §.), und der Exponent davon $dy = K$ (52. §.) seyn, statt dessen man auch $dy = Kdx$ setzen kann (55. §.).

57. §.

Lehrsatz. Für jede Function y von einer veränderlichen Größe v müssen gewisse von Δv unabhängige Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. möglich seyn, wofür ist $\Delta y = \alpha\Delta v + \beta\Delta v^2 + \gamma\Delta v^3 + \delta\Delta v^4 + \text{etc.}$

Beweis. 1. Man kann jede durch die veränderliche Größe v gegebene Function durch $y = Av^a + Bv^b + Cv^c + Dv^d + \text{etc.}$ ausdrücken (31. §.)

2. Wenn man sich demnach vorstellt, daß die absolute veränderliche Größe, auf welche die Function y sich bezieht, (40. §.), es mag v dieselbe, oder was immer für eine Function von einer absoluten veränderlichen Größe x seyn, um eine Differenz zunimmt, so muß in beyden Fällen $v + \Delta v$ aus v werden, und dafür findet man in (1) nach (42. §.)

$$\begin{aligned}\Delta y = A(v+\Delta v)^a &+ B(v+\Delta v)^b + C(v+\Delta v)^c + \text{etc.}\\ - Av^a \quad &- Bv^b \qquad\quad - Cv^c \quad - \text{etc.}\end{aligned}$$

3. Drückt man nun die Potenzen von $v + \Delta v$ nach dem, für alle mögliche Exponenten bereits erwiesenen (11. §.), binomischen Lehrsatze aus (I. Band. 76. §. 4. Zusatz.); so wird man finden, daß es gewisse bloß von A, B, C, - - - a, b, c, - - - v abhängige Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. geben

geben muß, für welche die Differenz Δy in (2) folgendermaßen ausgedrückt werden kann.

$$\Delta y = \alpha \Delta v + \beta \Delta v^2 + \gamma \Delta v^3 + \delta \Delta v^4 + \text{etc.},$$

$$\text{für } \alpha = a A v^{a-1} + b B v^{b-1} + c C v^{c-1} + \text{etc.}$$

58. §.

1. Zusatz. Weil jede Function u von einer absoluten veränderlichen Größe x durch $u = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}$ kann ausgedrückt werden (31. §.), wofür $\Delta u = \alpha \Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 + \delta \Delta x^4$ erhalten wird (57. §.); so ist gewiß, daß es für jede Function u von einer absoluten veränderlichen Größe x ein Differentialverhältniß geben muß, dessen Exponent $du = \alpha = \alpha\, dx$ (56. §.) sich aus der Function u nach einem bestimmten Gesetze herleiten läßt, so daß $du = (a A x^{a-1} + b B x^{b-1} + c C x^{c-1} + \text{etc.})\, dx$ seyn würde, wenn $u = A x^a + B x^b + C x^c + \text{etc.}$ wäre. (57. §.)

59. §.

2. Zusatz. Die Differenz Δu jeder Function u von einer absoluten veränderlichen Größe x hängt von der Differenz Δx dieser Größe so ab, daß man sie für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten β, γ, δ, etc. durch $\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 + \delta \Delta x^4 + \text{etc.}$ ausdrücken kann. (58. §.)

60. §.

3. Zusatz. Ist v in (57. §.) keine absolute veränderliche Größe, sondern eine Function von einer solchen Größe x; so kann man $\Delta v = \frac{dv}{dx} \Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 + \text{etc.}$ setzen (59. §.); dafür erhielte man $\Delta y = \alpha \frac{dv}{dx} \Delta x + P \Delta x^2$

$+Q\Delta x^3 + R\Delta x^4 +$ etc. für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten P, Q, R, etc. aus (57. §.) wegen (31. §.); daher $dy = \frac{\alpha dv}{dx} = \alpha dv.$ (56. §.)

61. §.

4. Zusatz. Es mag demnach v eine absolute oder abhängige veränderliche Größe seyn (40. §.); so muß doch für jede Function y von v ein Differentialverhältniß möglich seyn, dessen Exponent dy dem Produkte aus dem Exponenten dv des Differentialverhältnisses der veränderlichen Größe v in eine Größe V gleich ist, welche von der Function y selbst nach einem bestimmten Gesetze abhängt, so daß $dy = Vdv$, und $V = aAv^{a-1} + bBv^{b-1} + cCv^{c-1} +$ etc. (60. 57. §.) seyn muß, wenn $y = Av^a + Bv^b + Cv^c +$ etc. ist (31. §.), wobey man doch $dv = 1$ setzen kann, sobald v eine absolute veränderliche Größe ist. (58. 55. §.)

62. §.

5. Zusatz. Weil, für $y = Z + C$, $\Delta y = \Delta Z$ (44. §.) $= \frac{dZ}{dx}\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 +$ etc. (59. §.), mithin $dy = dZ$ (56. §.) ist; so erhellet daraus, daß der Exponent des Differentialverhältnisses einer aus einem beständigen Theile C bestehenden Function $y = Z + C$ dem Exponenten des Differentialverhältnisses ihres veränderlichen Theils Z gleich ist, mithin ganz unabhängig von dem unveränderlichen Theile C.

63. §.

6. Zusatz. Und für $y = CZ$ wäre $\Delta y = C\Delta Z$ (44. §.) $= \frac{CdZ}{dx}\Delta x + C\beta\Delta x^2 + C\gamma\Delta x^3 +$ etc. (59. §.); mithin

hin $dy = C dZ$ (56. §.); der Exponent des Differentialverhältnisses des Produkts aus einer beständigen Größe C in was immer für eine Function Z von einer absoluten veränderlichen Größe x ist gleich dem Produkte aus derselben beständigen Größe C in den Exponenten des Differentialverhältnisses der Function Z.

64. §.

7. Zusatz. Für die Summe $y = P + Q + R + \cdots + Z$ mehrerer Functionen von einer absoluten veränderlichen Größe x ist der Exponent ihres Differentialverhältnisses der Summe der Exponenten der den einzelnen Functionen P, Q, R, - - - Z zugehörigen Differentialverhältnisse gleich: nämlich $\Delta y = \Delta P + \Delta Q + \Delta R + \cdots + \Delta Z$ (45. §.)
$$= \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx} + \cdots + \frac{dZ}{dx}\right)\Delta x + M\Delta x^2$$
$+ N\Delta x^3 +$ etc. für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten M, N, etc (59. §.); also $dy = dP + dQ + dR + \cdots + dZ$ (56. §.)

65. §.

Lehrsatz. Die Exponenten der Differentialverhältnisse zwoer Functionen $u = X + A$, $z = Z + B$ von einer absoluten veränderlichen Größe x, deren veränderliche Theile X, Z einander gleich sind, sind unter sich gleich.

Beweis. Weil $\Delta X = \Delta Z$ für jede mögliche Differenz $\Delta x = \frac{1}{m} x$ seyn muß (46. 47. §.); so müssen gewisse, von Δx unabhängige Coefficienten F, G, H, - - - f, g, h, etc. möglich seyn, für welche $\frac{dX}{dx}\Delta x + F\Delta x^2 + G\Delta x^3$
$+ H\Delta x^4$

$+H\Delta x^4+\text{etc.} = \frac{dZ}{dx}\Delta x + f\Delta x^2 + g\Delta x^3 + h\Delta x^4 + \text{etc.}$ seyn würde (59. §.): also ist auch $\frac{dX}{dx} + F\Delta x + G\Delta x^2 + \text{etc.} = \frac{dZ}{dx} + f\Delta x + g\Delta x^2 + \text{etc.}$, und $\frac{dX}{dx} = \frac{dZ}{dx}$ (5. §.), mithin $dX = dZ$, und nun $du = dz$ (62. §.).

66. §.

Lehrsatz. Wenn der veränderliche Theil Y einer Function $y = Y + A$ grösser ist, als der veränderliche Theil Z einer andern Function $z = Z + B$; so muß auch der Exponent des Differentialverhältnisses der ersten Function größer seyn, als der Exponent des Differentialverhältnisses der zweyten Function, nämlich $dy > dz$.

Beweis. Ich setze voraus, daß der veränderliche Theil einer Function hier im strengsten Verstande genommen, daher von dem unveränderlichen Theile, wenn die Function einen solchen hat, genau abgesondert betrachtet wird. Wäre z. B. die Function $y = (a+x)^2 + b$ gegeben, weil $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ ist; so müßte man sich durch den veränderlichen Theil von y eigentlich $2ax + x^2$ denken, und $a^2 + b$, nicht aber b allein, für den unveränderlichen Theil halten.

Wenn demnach der veränderliche Theil Y der Function $y = Y + A$ größer ist, als der veränderliche Theil Z einer andern Function $z = Z + B$; so muß es eine Function $X = Y - Z$ von der absoluten veränderlichen Größe x worauf die Functionen y, x sich beziehen mögen (40. §.), geben,

ben, wofür $y=X+Z$, daher $dY=dX+dZ$ (65. 64. §.), mithin $dY > dZ$ ist. Weil aber $dy=dY$ und $dz=dZ$ seyn muß (62. §.); so ist auch $dy > dz$.

67. §.

1. Zusatz. Daher auch umgekehrt gleiche Exponenten dy, dz der Differentialverhältnisse können nur solchen Functionen y, z zugehören, deren veränderliche Theile einander gleich sind (66. §.)

68. §.

2. Zusatz. Ungleiche Exponenten $dz > dy$ zweyer Differentialverhältnisse können aber nur solchen Functionen $y=Y+A$, und $z=Z+B$ zugehören, deren veränderliche Theile Y, Z ungleich sind (65. §.), dergestalt, daß der veränderliche Theil Z derjenigen Function z, welcher der größere Exponent dz zugehört, größer seyn muß, als der veränderliche Theil Y der andern Function y, welcher der kleinere Exponent zugehört. (66. §.)

69. §.

Lehrsatz. Wenn eine Function y von einer absoluten veränderlichen Größe x dergestalt beschaffen ist, daß für gewisse von Δx unabhängige Größen $Z, P, Q, R, \text{---}\ p, q, r$, etc. und für jede mögliche Differenz Δx (47. §.)

$$\text{sowohl}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} > Z+\beta\Delta x+p\Delta x^2+r\Delta x^3+\text{etc.},$$

$$\text{als}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} < Z+P\Delta x+Q\Delta x^2+R\Delta x^3+\text{etc.}$$

ist; so ist $dy=Z=Zdx$ (55. §.) der Exponent des Differentialverhältnisses der Function y.

Be-

Beweis. Man kann $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ durch $\frac{dy}{dx} + \beta \Delta x + \gamma \Delta x^2 + \delta \Delta x^3 + \text{etc.}$ ausdrücken (59. §.): also ist

$$\frac{dy}{dx} > Z + (p - \beta) \Delta x + (q - \gamma) \Delta x^2 + (r - \delta) \Delta x^3 + \text{etc.}$$

und $$\frac{dy}{dx} < Z + (P - \beta) \Delta x + (Q - \gamma) \Delta x^2 + (R - \delta) \Delta x^3 + \text{etc.}$$

mithin $\frac{dy}{dx} = Z$ (9. §.), und $dy = Zdx$.

70. §.

Aus den bisherigen allgemeinsten Gründen läßt sich die Möglichkeit des Nutzens, welchen man aus einer umständlichen Betrachtung der Differentialverhältnisse ziehen kann, und der Grund davon begreiflich machen.

1. Weil nämlich die Exponenten der Differentialverhältnisse aller Functionen, ihrer Größe und Form nach, auf eine vollkommen bestimmte Art durch die Functionen selbst bestimmt sind (58. §.) und die Grundursache aller Eigenschaften, welche einer Function zukommen mögen, ihre Form ist (II. Band. 2. §. 1. Zusatz.); so ist wohl möglich, daß gewisse Eigenschaften der Functionen sich aus den Eigenschaften der Exponenten ihrer Differentialverhältnisse herleiten, und

2. selbst die Functionen aus den Exponenten ihrer Differentialverhältnisse sich bestimmen lassen, welches zugleich die Möglichkeit der Integralrechnung (52. §.) beweiset.

3. Dieses (1) (2) ist endlich um so wichtiger, da es möglich ist, den Exponenten des Differentialverhältnisses

einer

einer Function y zu entdecken, wenn gleich diese noch unbekannt ist, nämlich nach (69. §.) wie es ein einziges Beyspiel, etwa das in (II. Band, 29. §.) genugsam erläutern würde.

71. §.

Aufgabe. Den Exponenten des Differentialverhältnisses jeder Potenz $y = Ax^a$ von einer absoluten veränderlichen Größe x zu bestimmen (II. Band 7. §.)

Auflösung. Er ist $dy = aAx^{a-1}$, oder auch $dy = aAx^{a-1}dx$ (58. 55. §.)

§. 72.

Aufgabe. Für den bekannten Exponenten dv des Differentialverhältnisses einer Function v von einer absoluten veränderlichen Größe x, den Exponenten des Differentialverhältnisses jeder Potenz $y = Av^a$ von v zu finden. (II. Band. 8. §.)

Auflösung. Er muß seyn $dy = aAv^{a-1}dv$ (61. §.).

73. §.

Aufgabe. Für die bekannten Exponenten du, dv, der Differentialverhältnisse zwoer Functionen u, v von einer absoluten veränderlichen Größe x, den Exponenten des Differentialverhältnisses des Products $y = uv$ zu finden (II. Band. 9. §.)

Auflösung. Er ist $dy = udv + vdu$.

Beweis. Es ist $\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta v \Delta u$ (II. Band. 9. §.).

In

In der Bedeutung (59. §.) ist aber

$$\Delta v = \frac{dv}{dx}\Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \beta' \Delta x^2 + \gamma' \Delta x^3 + \text{etc.}$$

Wenn man daher diese Werthe in Δy nähme; so würde Δy, für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten K, L, M, etc. in folgende Reihe übergehn.

$$\Delta y = \left(\frac{udv}{dx} + \frac{vdu}{dx}\right)\Delta x + K\Delta x^2 + L\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Daher ist nach (56. §.) $dy = udv + vdu$.

74. §.

Aufgabe. Für die bekannten Exponenten der Differentialverhältnisse zwoer Functionen Y, Z von einer absoluten veränderlichen Größe x, den Exponenten des Differentialverhältnisses der gebrochenen Function $y = \frac{Y}{Z}$ zu finden.

Auflösung. Es muß seyn $dy = \frac{ZdY - YdZ}{Z^2}$, wegen (73. §.), wie in (II. Band. 9. §. 3. Zusatz.).

75. §.

Lehrsatz. Wenn $dy = \alpha dz$ der Exponent des Differentialverhältnisses einer Function y von der veränderlichen Größe z ist; so muß $dz = \frac{dy}{\alpha}$ der Exponent des Differentialverhältnisses derjenigen Function z von y seyn, welche durch Umkehrung der ersten Function entstehen würde. (II. Band. 10. §. 1. 2. Zusatz.)

Beweis. Wie in (II. Band. 11. §. Zusatz.)

76. §.

Aufgabe. Den Exponenten des Differentialverhältnisses der logarithmischen Function $y=lz$, von einer veränderlichen Größe z zu finden (II. Band. 17. §.).

Auflösung. Die Auflösung im 2ten Bande ist wirklich unrichtig: wenn doch M den Modul des Systemes bedeutet (18. §.), so soll seyn $dy=\frac{Mdz}{z}$, wie im (2ten Bandes 17. §. 1. Zus.)

Beweis. Denn wenn die absolute veränderliche Größe, auf welche $y=lz$ sich beziehet, es mag z dieselbe Größe, oder was immer für eine Function von einer absoluten veränderlichen Größe x seyn, um eine Differenz wächst; so muß z in $z^{I}=z+\Delta z$ übergehen, und dafür übergeht $y=lz$ in $l(z+\Delta z)=y^{I}$: also ist (4. §.)

$$y^{I}-y=\Delta y=l(z+\Delta z)-lz,$$

Daher nach (I. Band. 135. §.).

$$\Delta y=l\frac{z+\Delta z}{z}=l\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right).$$

Nach (12. §. findet man also:

$$\Delta y=\left(\frac{\Delta z}{z}-\frac{\Delta z^2}{2.z^2}+\frac{\Delta z^3}{3.z^3}-\frac{\Delta z^4}{4.z^4}+\frac{\Delta z^5}{5.z^5}-\frac{\Delta z^6}{6.z^6}+\text{etc.}\right)M.$$

Ist nun z eine absolute veränderliche Größe; so folgt daraus $dy=\frac{M}{z}=\frac{Mdz}{z}$ (56. §.).

Ist aber z keine absolute veränderliche Größe, sondern eine Function von der absoluten veränderlichen Größe x:

so kann man $\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 + \text{etc.}$ setzen (59. §.): wegen (31. §.) müssen also gewisse von Δx unabhängige Coefficienten k, l, m, etc. möglich seyn, für welche sich der obige Ausdruck Δy in folgenden verwandeln ließe.

$$\Delta y = \frac{Mdz}{zdx}\Delta x + k\Delta x^2 + l\Delta x^3 + m\Delta x^4 + \text{etc.}$$

Also ist $dy = \frac{Mdz}{z}$ (56. §.).

Für die natürlichen Logarithmen $y = lz$ wäre $dy = \frac{dz}{z}$ (18. §.), woraus man das übrige, wie in (II. Band. 2. 3. 4. 5. 8. 9. 10. Zusatz des 17ten §.) herleiten kann.

77. §.

Aufgabe. Wenn man Sin φ und Cosin φ als zwo Functionen vom Kreisbogen φ betrachtet, die Exponenten ihrer Differentialverhältnisse zu bestimmen.

Auflösung. Es soll seyn $d\,\text{Sin}\,\varphi = \text{Cos}\,\varphi . d\varphi$, und $d\,\text{Cosin}\,\varphi = -\text{Sin}\,\varphi . d\varphi$.

Beweis. Aus (28. §.) nach (64. 71. 62. §.) findet man folgende Reihen.

$$\text{I. Sin}\,\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2\ldots6.7} + \text{etc.}$$

$$\text{II. Cos.}\,\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2\ldots5.6} + \text{etc.}$$

$$\text{III. } d\,\text{Sin}\,\varphi = d\varphi\left(1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2\ldots6} + \text{etc.}\right)$$

IV.

IV. $d\,Cos\,\varphi = -d\,\varphi \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2..5} - etc. \right).$

Also ist $d\,Sin\,\varphi = Cos\,\varphi . d\,\varphi$,

und $d\,Cos\,\varphi = -Sin\,\varphi . d\,\varphi$.

78. §.

Will man demnach den Bogen φ als eine Function von seinem Sinus oder Cosinus betrachten; so ist (77. §.) nach (75. §.)

$$d\varphi = \frac{d\,Sin\,\varphi}{Cosin\,\varphi},\ d\varphi = -\frac{d\,Cosin\,\varphi}{Sin\,\varphi}.$$

Setzt man $\varphi = Arc\,Sin\,x$, mithin $Cos\,\varphi = \sqrt{(1 - x^2)}$, indem $Sin\,\varphi = x$ ist; so hat man

$$d\,Arc\,Sin\,x = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

Setzt man aber $\varphi = Arc\,Cos\,x$, mithin $Sin\,\varphi = \sqrt{(1 - x^2)}$, wegen $Cos\,\varphi = x$; so ist:

$$d\,Arc\,Cos\,x = \frac{-dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

Diese Formuln sind in (II. Band. 22. §. 1. 2. 3. Zus.) aus andern Gründen hergeleitet worden, und daraus ergiebt sich alles übrige (a. a. O. 4. 5. bis 17. Zus.), wie daselbst.

79. §.

Erklärung. Das im (52. §.) erklärte Differentialverhältniß soll das erste Differentialverhältniß einer Function y heißen: ist sein Exponent dy eine Function von der veränderlichen Größe, auf welche y sich bezieht; so wird es auch dafür ein erstes Differentialverhältniß geben, und

dieses soll das zweyte Differentialverhältniß von y seyn. Ueberhaupt soll jedes höhere Differentialverhältniß in Ansehung des Exponenten des nächst niedrigeren Differentialverhältnisses einer Function y das seyn, was das erste Differentialverhältniß in Ansehung der Function y selbst ist: nämlich jedes $(r+1)$te Differentialverhältniß einer Function y soll das erste Differentialverhältniß des Exponenten ihres rten Differentialverhältnisses bedeuten, insofern dieser Exponent als eine Function von eben der veränderlichen Größe ist, auf welche y sich beziehen mag. Wenn demnach dy, d^2y, d^3y, d^4y, - - - d^ry, $d^{r+1}y$ die Exponenten des 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, - - - rten, $(r+1)$ten Differentialverhältnisses von y bedeuten; so ist eigentlich $d^2y = d.dy$; $d^3y = d.d^2y$; $d^4y = d.d^3y$, und $d^{r+1}y = d.d^ry$.

80. §.

Da also die Regeln zur Erfindung des ersten Differentialverhältnisses für jede mögliche Function y im Vorhergehenden festgesetzt worden sind; so kann man nach denselben Regeln nun auch höhere Differentialverhältnisse für alle Functionen y aus ihren ersten Differentialverhältnissen bestimmen (79. §.), wie in (II. Band. 15. §. und Zus. 17. §. 2. Zus. 22. §. 18. Zus.)

81. §.

Will man aber das System der höheren Differenzen Δ^2y, Δ^3y, Δ^4y, etc. annehmen (II. B. 12. 13. 14. §.), und darauf das System der höheren Differentialverhältnisse bauen (welches gar nicht nothwendig ist); so wird man dieses System am bequemsten so aufführen. So wie die Gränze,

welcher

welcher das Verhältniß $\Delta y : \Delta x$ der ersten Differenz einer Function y von der absoluten veränderlichen Größe x gegen die Differenz dieser Größe sich nähern würde, wenn Δx nach (47. §.) allmählich abnähme, das erste Differentialverhältniß von y hieß (52. §.); eben so soll jedes nte Differentialverhältniß von y die Gränze bedeuten, welcher das Verhältniß $\Delta^n y ; \Delta x^n$ der nten Differenz der Function y gegen die nte Potenz der Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe sich nähern müßte, wenn Δx allmählich abnähme: und so wie dy den Exponenten des ersten Differentialverhältnisses von y bedeutete; eben so kann $d^n y$ überhaupt den Exponenten des nten Differentialverhältnisses von y bedeuten.

Und nun kann man darthun, daß $d^{r+1}y = d.d^r y$ seyn muß, wie im (79. §.). Denn für jede Function y von einer absoluten veränderlichen Größe x kann man folgende Ausdrücke festsetzen (II. Band. 14. §.).

$$\Delta^r y = P\Delta x^r + Q\Delta x^{r+1};$$
$$\Delta P = p\Delta x + \varphi\,\Delta x^2;$$
$$\Delta^{r+1} y = p\,\Delta x^{r+1} + L\Delta x^{r+2}.$$

Also wird man haben:

I. $\Delta^r y ; \Delta x^r = (P + Q\Delta x) : 1.$

II. $\Delta P ; \Delta x = (p + \varphi\,\Delta x) : 1.$

III. $\Delta^{r+1} y ; \Delta x^{r+1} = (p + L\,\Delta x) : 1.$

Da also Q, φ, L, wenn sie von Δx abhängen, gewiß unter die Form $\beta + \gamma\Delta x + \delta\Delta x^2 +$ etc. gehören, und P, p von Δx gar nicht abhängen (a. a. O.); so ist offenbar, daß, wenn Δx nach (47. §.) abnähme, das Verhältniß I) der

Gränze P : 1, das Verhältniß II.) der Gränze p : 1, und das Verhältniß III) der Gränze p : 1 sich nähern würde (51. §.): also ist, nach der Erklärung, P : 1 das rte Differentialverhältniß von y und p ist sowohl das erste Differentialverhältniß von P, als das (r+1)te von y; daher

$$d^r y = P,\ dP = p,\ d^{r+1} y = p,$$

mithin $d^{r+1} y = dP = d.dy$.

82. §.

Erklärung. Zwo veränderliche Größen **hängen von einander ab**, wenn sie in einer solchen Verbindung unter einander stehen, daß durch jede Aenderung der einen, eine gewisse Aenderung bey der andern hervorgebracht wird: hingegen sind zwo veränderliche Größen **von einander unabhängig**, wenn jede unter ihnen geändert werden kann, ohne daß dadurch irgend eine Aenderung bey der andern hervorgebracht wird.

83. §.

1. **Zusatz.** Jede unter zwoen von einander abhängigen veränderlichen Größen u, v kann als eine Function von der andern betrachtet werden (82. §.): daher wird entweder eine unter ihnen eine absolute veränderliche Größe, und die andere eine Function von ihr, oder jede eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Größe x seyn müssen (40. §.).

84. §.

2. **Zusatz.** Jede Function y von zwoen von einander abhängigen veränderlichen Größen u, v muß als eine Function betrachtet werden, die sich auf eine absolute veränderliche Größe bezieht (83. §.): die vorhergehende Lehre von

Diffe-

Differentialverhältnissen gilt also für alle Functionen y von zwoen von einander abhängigen veränderlichen Größen u, v.

85. §.

3. Zusatz. Jede Function y von zwoen von einander unabhängigen veränderlichen Größen u, v muß hingegen als eine Function betrachtet werden, welche sich auf zwo absolute veränderliche Größen bezieht, so daß entweder jede der Größen u, v eine absolute veränderliche Größe, oder eine darunter, etwa u, eine absolute veränderliche Größe, und die andere v eine Function von irgend einer absoluten veränderlichen Größe x, oder auch u eine Function von einer andern absoluten veränderlichen Größe z ist. (82. 40. §.)

86. §.

4. Zusatz. Es ist also nicht gestattet, wenn y eine Function von zwoen von einander unabhängigen veränderlichen Größen u, v seyn soll, y und u, v als drey Functionen von einer einzigen absoluten veränderlichen Größe x, oder y, und eine der veränderlichen Größen u, v, etwa u, als zwo Functionen von der andern veränderlichen Größe v zu betrachten. (85. §.)

87. §.

Erklärung. Wenn u, v zwo von einander unabhängige veränderliche Größen sind, so kann jede darunter zu- oder abnehmen, ohne daß deswegen auch die andere irgend eine Aenderung leide. (82. §.) Hat man demnach eine Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v; so kann man bey ihr u als veränderlich, und v als unveränderlich, oder v

als veränderlich, und u als unveränderlich betrachten, als wenn y nur von u oder nur von v eine Function wäre: den Exponenten des Differentialverhältnisses, welches der Function y zugehören würde, wenn man bey ihr nur u, oder nur v für veränderlich annähme, wird man mit ^{u}dy oder ^{v}dy bezeichnen können. Wenn aber beyde Größen u und v, wie sie es wirklich sind, als veränderlich bey ihrer Function y angenommen werden: so soll die Summe der Differentialverhältnisse, welche der Function y zugehören müßten, wenn bey ihr u allein, oder v allein veränderlich wäre, das der Function y für beyde veränderliche Größen zugehörige Differentialverhältniß heißen, und sein Exponent mit ^{uv}dy bezeichnet werden.

88. §.

Lehrsatz. Der Exponent des einer Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v für diese beyden Größen zugehörigen Differentialverhältnisses ist der Summe der Exponenten derjenigen Differentialverhältnisse gleich, welche der Function y zugehören würden, wenn bey ihr nur u, oder nur v veränderlich wäre: oder es ist $^{uv}dy = {}^{u}dy + {}^{v}dy$. (87. §.)

Beweis. Dieses folgt aus der gegebnen Erklärung, (87. §.) wenn es überhaupt wahr ist, daß der Exponent eines Verhältnisses, welches die Summe zweyer andern Verhältnisse seyn soll, der Summe der Exponenten dieser Verhältnisse gleich ist, welches aber mit der Lehre von zusammengesetzten Verhältnissen, wie sie in vielen der besten Lehrbücher vorgetragen wird, im Widerspruche zu stehen scheint: ich darf es daher ohne Beweis nicht annehmen.

1. Es

1. Es seyen drey gleichartige Größen A, B, C. Zieht man nun die geometrischen Verhältnisse der Größen A, B gegen die dritte Größe C in Betrachtung; so untersucht man eigentlich, wieviel A, und wieviel B von C enthält, oder wie man sich gewöhnlich ausdrückt, wie oft C oder irgend ein aliquoter Theil davon in A, und wie oft in B steckt: dieses heißt die Größe von A, und die von B durch die Größe von C und eben dadurch auch das Verhältniß von A, und das von B gegen C bestimmen.

2. Daraus (1) folgt, daß, wenn A mehr als B von C enthält, wenn z. B. die ganze Größe C oder ein aliquoter Theil davon in A mehrmal als in B steckt, A gegen C größer ist, als B gegen C, das Verhältniß von A gegen C größer ist, als das von B gegen C: und wenn man fände, daß A mmal soviel als B von C enthält, daß z. B. irgend ein aliquoter Theil von C mmal so oft in A als in B steckt; so müßte man sagen, A sey gegen C mmal größer als B gegen C, oder das Verhältniß von A gegen C sey mmal größer als das von B gegen C.

3. Nun soll der Exponent des Verhältnisses einer Größe X gegen eine andere Z nichts anders als eine Zahl seyn, welche dadurch, daß sie von der Einheit 1 soviel enthält, wieviel enthält X von Z, anzeigen soll, wieviel eigentlich X von Z enthält: sagt man z. B. die ganze Zahl m oder die gebrochene $\frac{m}{n}$ sey der Exponent des Verhältnisses von X gegen Z; so sagt man dadurch nichts anders, als daß dieselbe Zahl anzeiget, Z ganz, oder ein ntel davon stecke mmal in X.

4. Findet man also, daß der Exponent des Verhältnisses von A gegen C mmal größer ist, als der Exponent des Verhältnisses von B gegen C; so wird man daraus erkennen, daß jenes Verhältniß ebenfalls mmal größer ist als dieses. (2) 3).

5. Allerdings darf man die Verhältnisse mit ihren Exponenten nicht verwechseln (eben so wenig, als es gestattet ist, die geradlinichten Winkel mit den aus ihren Spitzen und zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Kreisbogen zu verwechseln): wenn man doch zwey Verhältnisse A:C, B:C, als Verhältnisse mit einander vergleichen will; so darf man wohl sagen, sie verhalten sich gegen einander gerade wie ihre Exponenten, und zwar aus Gründen (1) 2) 3) 4).

6. Wird nun das Wort Summe im ächten Verstande genommen; so muß zuerst die Summe der Verhältnisse A:C, B:C gewiß ein Verhältniß X:x seyn; es muß ferner dieses Verhältniß sich gegen die einzelnen Verhältnisse A:C, B:C eben so, wie ein aus zweenen Theilen bestehendes Ganze gegen dieselben einzeln genommenen Theile, verhalten; also muß auch der Exponent der Summe X:x sich gegen die einzelnen Exponenten der Verhältnisse A:C, B:C, wie ein aus zweenen Theilen bestehendes Ganze gegen dieselben einzeln genommenen Theile verhalten (4); mithin muß er die Summe dieser Exponenten seyn.

7. Demnach, weil ${}^{u}dy:1$, ${}^{v}dy:1$, ${}^{uv}dy:1$ die Differentialverhältnisse seyn sollen, welche der Function y zugehören müssen, wenn bey ihr nur u, oder nur v, oder sowohl u als v als veränderlich betrachtet wird, und weil das letzte die Summe der beyden übrigen Verhältnissen seyn soll (87. §.) so ist auch ${}^{uv}dy = {}^{u}dy + {}^{v}dy$ nach (6).

An-

Anmerkung. Aus dem gegebenen Beweise lassen sich folgende Sätze herleiten, worauf einige der wichtigsten Anwendungen der Differentialverhältnisse beruhen.

I. Aus (N. 1. 2.) des Beweises erhellet, daß das Verhältniß A:C einer Größe A gegen eine andere C um so größer oder kleiner ist, je größer oder kleiner die Größe A ist bey einerley Größe C.

II. Aus (N. 5.) erhellt ferner, daß überhaupt zwey Verhältnisse, als Verhältnisse, etwa K:L, M:N sich gegen einander gerade wie ihre Exponenten $\frac{K}{L}$, $\frac{M}{N}$ verhalten.

III. Aus (N. 6.) erhellt endlich, daß überhaupt die Summe zweyer Verhältnisse, als Verhältnisse, ein Verhältniß seyn muß, dessen Exponent der Summe der Exponenten jener Verhältnisse gleich ist.

IV. Hieraus folgt aber nothwendig, daß die Differenz zweyer Verhältnisse ein Verhältniß seyn muß, dessen Exponent der Differenz der Exponenten jener Verhältnisse gleich ist.

Der scheinbare Widerspruch, in welchem diese Sätze (III, IV) mit der Lehre von zusammengesetzten Verhältnissen, wie sie in den besten Lehrbüchern abgehandelt wird, stehen, verschwinden sogleich, sobald man annimmt, daß das Wort Summe bey dieser Lehre, nicht, wie hier, in der sonst gewöhnlichen ächten Bedeutung genommen wird.

V. Wenn eine bestimmte Größe U die Gränze einer sich allmählich ändernden Größe Z ist; so muß, wenn P sich nicht ändert, das Verhältniß U:P die Gränze des sich ändernden Verhältnisses Z:P seyn.

1) Sey

1) Sey u eine wie immer kleine Größe, und u:P ein wie immer kleines Verhältniß (I.).

2) Der Unterschied der Verhältnisse Z:P, U:P sey das Verhältniß $\varphi:\mu$ (IV.), dessen Exponent der Differenz $\frac{Z}{P}-\frac{U}{P}=\frac{Z-U}{P}$, oder $\frac{U}{P}-\frac{Z}{P}=\frac{U-Z}{P}$ der Exponenten jener Verhältnisse gleich seyn muß (IV.): da also $\frac{u}{P}$ der Exponent des Verhältnisses u:P in (1) ist; so verhält sich das Verhältniß $\varphi:\mu$ gegen das Verhältniß u:P, wie $\frac{Z-U}{P}$, oder $\frac{U-Z}{P}$ gegen $\frac{u}{P}$, daher wie Z—U oder U—Z gegen u (II.). Da also Z—U, oder U—Z kleiner werden kann, als jede denkbare wie immer kleine Größe u in (1) wegen (48. §.); so kann auch der Unterschied $\varphi:\mu$ der Verhältnisse Z:P, U:P kleiner werden, als jedes denkbare, wie immer kleine Verhältniß u:P in (1), und eben deswegen ist das bestimmte Verhältniß U:P die Gränze des veränderlichen Verhältnisses Z:P (50. §.).

VI. Bey derselben Voraussetzung, daß U die Gränze der sich allmählich ändernden Größe Z ist, muß das Verhältniß P:U die Gränze des sich mit Z allmählich ändernden Verhältnisses P:Z seyn.

1) Wir wollen annehmen, Z sey beständig grösser als P: der Beweis für den Fall, wenn Z beständig kleiner ist als P, bleibt derselbe. Sey u, daher auch $\frac{u}{P}$ eine wie immer kleine Größe, mithin u:P ein wie immer kleines Verhältniß (I.).

2) Der

2) Der Unterschied $\varphi:\mu$ der Verhältnisse P:U, P:Z verhält sich gegen das Verhältniß u:P, wie $\frac{P}{U} - \frac{P}{Z}$ gegen $\frac{u}{P}$ (IV. II.), daher wie $\frac{P(Z-U)}{UZ}$ gegen $\frac{u}{P}$. Es mag aber u, und damit auch $\frac{uUZ}{P^2}$ wie immer klein gedacht werden; so muß doch Z — U noch kleiner werden können (48. §.), nämlich $Z - U < \frac{uUZ}{P^2}$, und eben deswegen auch $\frac{P(Z-U)}{UZ} < \frac{u}{P}$: also kann auch der Unterschied $\varphi:\mu$ der Verhältnisse P:U, P:Z kleiner werden, als jedes wie immer kleine Verhältniß u:P in (1), zum Beweis, daß das bestimmte Verhältniß P:U die Gränze des veränderlichen P:Z ist (50. §.).

89. §.

1. Zusatz. Für jede Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v müssen gewisse von du, dv unabhängige, und durch y vollkommen bestimmte Größen M, N möglich seyn, für welche nach (60. 87. 88. §.) wäre

$$^{u}dy = M\,du;\ ^{v}dy = N\,dv;$$
$$^{uv}dy = M\,du + N\,dv.$$

90. §.

2. Zusatz. Will man den Exponenten ^{uv}dy des einer Function y für beyde veränderlichen Größen u, v zugehörigen Differentialverhältnisses bestimmen; so suche man nach der vorhergehenden Theorie die Exponenten derjenigen Differentialverhältnisse, welche der Function y zugehören müßten,

müßten, wenn man bey ihr nur u, sodann nur v für veränderlich annähme, und drücke ${}^{uv}dy$ durch die Summe dieser Exponenten aus. (88. §.).

91. §.

3. Zusatz. Nach (90. §.) kann man allemal verfahren, auch alsdann, wenn die veränderlichen Größen u, v von einander abhängen. Denn man kann jede Function von was immer für veränderlichen Größen u, v, wegen (31. §.), durch

$$\text{I. } y = A u^{\alpha} v^{a} + B u^{\beta} v^{b} + C u^{\gamma} v^{c} + \text{etc.}$$

ausdrücken, woraus, nachdem man nur u, oder nur v für veränderlich annimmt, folgt nach (60. §.):

$$\text{II. } {}^{v}dy = (aAu^{\alpha} v^{a-1} + bBu^{\beta} v^{b-1} + cCu^{\gamma} v^{c-1} + \text{etc.})\, dv,$$

$$\text{III. } {}^{u}dy = (\alpha A v^{a} u^{\alpha-1} + \beta B v^{b} u^{\beta-1} + \gamma C v^{c} u^{\gamma-1} + \text{etc})\, du.$$

Nimmt man aber an, daß die veränderlichen Größen u, v von einander abhängen; so muß in I) nach (84. 64. 73. 72. 71. §.) seyn.

$$\begin{aligned} {}^{uv}dy = {} & \alpha A v^{a} u^{\alpha-1} du + a A u^{\alpha} v^{a-1} dv \\ & + \beta B v^{b} u^{\beta-1} du + b B u^{\beta} v^{b-1} dv \\ & + \gamma C v^{c} u^{\gamma-1} du + c C u^{\gamma} v^{c-1} dv \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Daher ist ${}^{uv}dy = {}^{u}dy + {}^{v}dy$, wie wenn u, v zwo von einander unabhängige veränderliche Größen wären. (87. 88. §.)

92. §.

4. Zusatz. Setzet man in (91. §.)

$$M = \alpha A v^{a} u^{\alpha-1} + \beta B v^{b} u^{\beta-1} + \gamma C v^{c} u^{\gamma-1} + \text{etc.};$$

$$N = a A u^{\alpha} v^{a-1} + b B u^{\beta} v^{b-1} + c C u^{\gamma} v^{c-1} + \text{etc.}:$$

so

so ist $\frac{{}^{v}dM}{dv} = \frac{{}^{u}dN}{du}$ (84. 64. 71. 72. §.).

Es mag also y was immer für eine Function von zwoen veränderlichen Größen u, v seyn; so giebt es für sie ein Differentialverhältniß, dessen Exponent überhaupt durch ${}^{uv}dy = Mdu + Ndv$ kann ausgedrückt werden (89. §.), und dabey sind M, N allemal solche Functionen von u, v daß dafür in der Bedeutung (87. §.) $\frac{{}^{v}dM}{dv} = \frac{{}^{u}dN}{du}$ seyn muß (91. §.).

93. §.

Erklärung. Das Differentialverhältniß des Exponenten ${}^{uv}dy$ der einer Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v für diese beyden Größen zugehörigen Differentialverhältnisses, welches ihm als einer Function von denselben veränderlichen Größen u, v zugehören mag, soll das Differentio-Differentialverhältniß, oder das Differentialverhältniß der zweyten Ordnung von der Function y heißen, dessen Exponenten man mit ${}^{uv}d^2y$, oder schlechthin mit d^2y bezeichnen kann.

94. §.

1. Zusatz. Das Differentio-Differentialverhältniß einer Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v ist in Ansehung der Exponenten dy ihres Differentialverhältnisses das, was dieses Differentialverhältniß in Ansehung der Function y seyn soll (93. 87. §.): also ist ${}^{uv}d.dy = {}^{u}d.dy + {}^{v}d.dy$ der Exponent ${}^{uv}d^2y$ des Differentio-Differentialverhältnisses von y (88. §.), das heißt: man findet den Exponenten d^2y des Differentio-Differentialverhältnisses

jeder Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v, wenn man die Exponenten der Differentialverhältnisse in eine Summe bringet, welche dem Exponenten ^{uv}dy (87. §.) als einer Function von u, v zugehören würden, wofern man bey ihm u allein, oder v allein für veränderlich annähme.

Z. B. Sey $y = u^2v$.

Denkt man sich v als eine beständige Größe; so ist:

I. $^{u}dy = vd.u^2$ (63. §.) $= 2vudu$.

Denkt man sich aber u als eine beständige Größe; so ist:

II. $^{v}dy = u^2dv$ (63. §.).

Aus (I.) (II.) erhält man also nach (90. §.)

III. $^{uv}dy = 2vudu + u^2dv$.

Nimmt man nun an, v in (III.), mithin auch dv sey unveränderlich; so muß man sich (III) als eine Function von einer veränderlichen Größe u denken, wovon du vielleicht eine Function ist (61. §.). Daher ist

$$^{u}d.dy = 2vd.udu + dvd.u^2;$$

nun ist $d.udu = dudu + uddu$ (73. §.)

$$= du^2 + ud^2u;$$

und $d.u^2 = 2udu$. Also

IV. $^{u}d.dy = 2vdu^2 + 2vud^2u + 2ududv$.

Nimmt man hingegen an, nur v sey veränderlich in (III); so muß man sich (III) als eine Function von einer veränderlichen Größe v denken, wovon dv vielleicht eine Function ist. Demnach ist

V. $^{v}d.y = 2ududv + u^2d^2v$.

Aus (IV.) (V.) erhält man also:

VI.

$$\text{VI. } {}^{uv}d^2y = 2vdu^2 + 2vudu^2 + 2ududv + 2ududv + u^2d^2v = 2vdu^2 + 2vud^2u + 4ududv + u^2d^2v.$$

Da es aber möglich ist, daß eine unter den veränderlichen Größen u, v, etwa u eine absolute veränderliche Größe ist; so nehmen wir u wirklich für eine solche Größe an. Bey dieser Voraussetzung ist $du = 1$ (55. §.), daher $d^2u = 0$ (79. 53. §.) in (IV), mithin

$${}^{uv}d^2y = 2vdu^2 + 4ududv + u^2d^2v \text{ in (VI.)}.$$

Wäre aber v eine absolute veränderliche Größe, daher $dv = 1$ (55. §.), und $d^2v = 0$ (79. 53. §.) in (V); so hätte man

$${}^{uv}d^2y = 2vdu^2 + 2vud^2u + 4ududv \text{ in (VI.)}.$$

Wäre endlich sowohl u als v eine absolute veränderliche Größe, folglich $du = 1$, $dv = 1$, $d^2u = 0$, $d^2v = 0$ in (IV) V); so hätte man

$${}^{uv}d^2y = 2vdu^2 + 4ududv \text{ in (VI.)}.$$

95. §.

2. Zusatz. Weil es für jede Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v ein Differentialverhältniß giebt, dessen Exponent durch $dy = Mdu + Ndv$ kann ausgedrückt werden (89. §.); so wird es für sie auch ein Differentio-Differentialverhältniß geben, dessen Exponent $d^2y = Md^2u + {}^{u}dM . du + {}^{v}dM . du + N . d^2v + {}^{v}dN . dv + {}^{u}dN . dv$ ist (94. §.).

96. §.

3. Zusatz. Da es aber gewisse von du, dv unabhängige Functionen p, q, r, s, geben muß, für welche ${}^{u}dM = pdu$,

${}^{v}dM = q\,dv$, ${}^{u}dN = r\,du$, ${}^{v}dN = s\,dv$ ist (61. §.); so ist einleuchtend, daß es für jede Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v ein Differential- und Differentio-Differentialverhältniß geben muß, so daß der Exponent des ersten, wie in (I.), und der des zweyten, wie in (II.) kann ausgedrückt werden (95. §.).

$$\text{I. } dy = Mdu + Ndv.$$

$$\text{II. } d^2y = Md^2u + Nd^2v + kdudv + pdu^2 + sdv^2.$$

$$\text{Für } p = \frac{{}^{u}dM}{du};\ q = \frac{{}^{v}dM}{dv};\ r = \frac{{}^{u}dN}{du};\ s = \frac{{}^{v}dN}{dv};$$

$$k = q + r.$$

97. §.

4. Zusatz. Wenn aber der Exponent dv des ersten Differentialverhältnisses von der veränderlichen Größe v unveränderlich ist, mithin $d.dv = d^2v = o$ (53. §.); so ist in (96. §.)

$$d^2y = Md^2u + kdudv + pdu^2 + sdv^2.$$

98. §.

5. Zusatz. Wären hingegen die Exponenten du, dv der ersten Differentialverhältnisse beyder veränderlichen Größen u, v unveränderlich; so wäre $d^2u = o$ und $d^2v = o$; also in (96. §.)

$$d^2y = kdudv + pdu^2 + sdv^2.$$

99. §.

6. Zusatz. Es kann geschehen, daß für irgend eine Constante c, und eine Function φ von v, u, $N = \varphi + c$ in (96. §.) ist: da aber in diesem Fall ${}^{u}dN = {}^{u}d\varphi$, und ${}^{v}dN = {}^{v}d\varphi$ seyn müßte (62. §.); so wäre eigentlich

$dy = Mdu + (\varphi + c)dv$ in (96. §.), aber d^2y würde ganz unabhängig von cdv seyn, wenn dabey dv unveränderlich wäre (96. 97. 98. §.)

100. §.

Erklärung. Das Integral des gegebenen Exponenten eines Differentialverhältnisses suchen, oder den Exponenten eines Differentialverhältnisses integriren, soll nichts anders bedeuten, als diejenige Function suchen, deren Differentialverhältnisses Exponent dem gegebenen Exponenten gleich ist.

101. §.

1. Zusatz. Was im zweyten Bande ein Verschwindungsquotient war, das ist hier der Exponent eines Differentialverhältnisses: die Exponenten der ersten Differentialverhältnisse aller Functionen von einer veränderlichen Größe können also nach (II. Band. I. II. III. Abschnitt) integrirt werden (100. §.).

102. §.

2. Zusatz. Und jeder Exponent $d^n y$ jedes nten Differentialverhältnisses einer Function y von einer veränderlichen Größe (79. §.) kann nach (II. Band. 65. §.) integrirt werden (100. §.).

103. §.

3. Zusatz. Die vorhergehende Lehre (82 - - - 92. §.) von den Exponenten der ersten Differentialverhältnisse, welche gewissen Functionen von zwoen veränderlichen Größen zugehören, läßt sich an die Stelle der in (II. Band. 59. §. 1. 2. 3. Zusatz.) setzen, und die Integrirung derselben Exponenten nach (II. Band. 60. §.) vornehmen. (100. §.)

104. §.

4. Zusatz. Will man hingegen den Exponenten ${}^{uv}d^2y$ eines Differentio-Differentialverhältnisses, welches einer Function y von zwoen veränderlichen Größen u, v zugehören soll, integriren; so suche man zuerst den Exponenten ${}^{uv}dy$ des ersten Differentialverhältnisses von y, sodann die Function y selbst nach (103. §.): denn es ist ${}^{uv}dy$ das unmittelbare Integral von ${}^{uv}d^2y$, nämlich ${}^{uv}dy = \int {}^{uv}d^2y$ (93. 100. §.).

105. §.

5. Zusatz. Wenn demnach ein Exponent ${}^{uv}d^2y$ die Form einer Reihe hat, worin die Exponenten d^2u, d^2v mit was immer für Größen multiplicirt vorkommen mögen, etwa Md^2u, Nd^2v; so nehme man die Factoren M, N von d^2u, d^2v, und setze das Integral $\int {}^{uv}d^2y = Mdu + Ndv = dy$ (96. §.), hernach suche man y daraus (104. §.). Doch vergesse man nicht zu prüfen, ob dy auf diese Art richtig ist bestimmt worden: daher differentiire man den gefundenen Exponenten dy für beyde veränderliche Größen u, v (94. §.), und sehe, ob dadurch der gegebene Exponent d^2y wirklich hergestellt wird (100. 104. §.).

Beyspiele.

Sey $d^2y = vd^2u + 2dudv + ud^2v$.

Die Factoren von d^2u, d^2v sind v und u: es soll also seyn:

$$\text{I. } dy = vdu + udv;$$

und nun nach (II. Band. 60. §.

$$\text{II. } y = uv + C.$$

Daß

Daß (I.) seine Richtigkeit hat, konnte dadurch bewiesen werden, weil (I.) für beyde veränderliche Größen u, v, wovon du, dv gewisse Functionen seyn sollen, nach (94. §.) differentiirt, den gegebenen Exponenten d^2y herstellt: dergleichen Prüfungen werde ich aber bey folgenden Beyspielen voraussetzen.

Sey $d^2y = 3u^2v^2d^2u + 6uv^2du^2 + 12u^2vdudv + 2u^3vd^2v + 2u^3dv^2$.

Die Factoren von d^2u, d^2v sind hier $3u^2v^2$ und $2u^3v$: also soll seyn:

$$dy = 3u^2v^2du + 2u^3vdv,$$

und nun nach (II. Band. 60. §.).

$$y = v^2u^3 + C.$$

Sey $d^2y = 3u^2vd^2u + 6uvdu^2 + 6u^2dudv + u^3d^2v + 2vd^2v + 2dv^2$.

Wegen der Factoren $3u^2v$, und $u^3 + 2v$ von d^2u und d^2v soll seyn:

$$dy = 3u^2vdu + (u^3 + 2v)dv,$$

und nun nach (II. Band. 60. §.).

$$y = vu^3 + v^2 + C.$$

Bisweilen kömmt ein solcher Exponent, durch den Exponenten des ersten Differentialverhältnisses einer absoluten veränderlichen Größe dividirt vor, so daß, wenn man jenen Exponenten mit ${}^{uv}dU$, und diesen mit dx bezeichnet, der gegebene Exponent die Form eines Bruches $\frac{{}^{uv}dU}{dx}$ hat. In solchen Fällen sind gemeiniglich u, v gewisse Functionen von x, und $dx = 1$ (55. §.) constans, das Integral selbst ist aber $\frac{\int {}^{uv}dU}{dx}$.

Z. B. Sey $dV = \frac{ud^2v + ad^2u - vd^2u}{dx}$;

so ist $V = \frac{\int(ud^2v + ad^2u - vd^2u)}{dx}$.

Wegen der Factoren u, a—v von d^2v und d^2u aber findet man

$$\int(ud^2v + ad^2u - vd^2u) = udv + (a-v)\,du;$$

$$\text{also } V = \frac{udv + (a-v)\,du}{dx} + C.$$

106. §.

6. Zusatz. Wenn bey dem gegebenen Exponenten d^2y, von der in (105. §.) betrachteten Form, der Exponent des zweyten Differentialverhältnisses einer veränderlichen Größe, u oder v, etwa der Exponent d^2v fehlet; so ist dieses ein Zeichen, daß dv beym Exponenten dy des Differentialverhältnisses von y unveränderlich war (96. 97. §.) Daher, um dy daraus zu erhalten, nehme man den Factor, etwa P, welchen d^2u vor sich hat, und den Factor, etwa T, des Quadrats dv^2 des beständigen Exponenten dv; integrire Tdv für die veränderliche Größe v, und setze $dy = Pdu\, dv / \int Tdv$; hernach differentiire dieses nach (94. §.) für beyde veränderliche Größen u, v und beständigen Exponenten dv. Ist nun das, was die Differentiation giebt, dem gegebenen Exponenten d^2y gleich; so hat man dy richtig bestimmt (100. 104. §.); sonst ziehe man es vom gegebenen Exponenten d^2y ab; integrire den Rest für die veränderliche Größe u, oder v, welches X geben mag; und setze Xdv im ersten, oder Xdu im zweyten Fall, zu $Pdu + dv / \int Tdv$;

die

die Summe soll dy geben, wofern sie die Prüfung nach (94. §.) aushält. Uebrigens muß man allemal noch eine Constante Cdv hinzusetzen: alles aus Gründen (96. 97. 99. §.).

Beyspiele.

Sey $d^2y = d^2u + 2dv^2$.

Es ist $dy = 1 . du + dv \int 2dv$

$= du + 2vdv + Cdv$.

Und nun nach (II. Band. 60. §.)

$y = u + v^2 + Cv + D$.

Für $d^2y = v^2 d^2u + 4vdudv + 2udv^2$,

ist $dy = v^2 du + dv \int 2udv$

$= v^2 du + 2uvdv + Cdv$.

Daher nach (II. Band. 60. §.)

$y = uv^2 + Cv + D$.

Sey $d^2y = vd^2u + 2dudv$.

Es sollte seyn:

$dy = vdu + dv \int 0 . dv = vdu$.

Es ist aber

${}^{uv}d . vdu = vd^2u + dudv$,

$d^2y - {}^{uv}d . vdu = dudv$,

und ${}^{u}\int dudv = dv \int du = udv$:

also setze man

$dy = vdu + udv + Cdv$

welches die Prüfung nach (94. §.) aushält. Daher ist nach (II. Band. 60. §.)

$y = uv + Cv + D$.

Sey $d^2y = 10uvd^2u + 10vdu^2 + 20ududv + 6vdv^2$.

Hier soll seyn

$$dy = 10uvdu + dv\int 6vdv$$
$$= 10uvdu + 3v^2dv.$$

Es ist aber

$$d^2y - {}^{uv}d(10uvdu + 3v^2dv) = 10ududv,$$

und ${}^{u}\int 10ududv = dv\int 10udu = 5u^2$;

also setze man

$$dy = 10uvdu + (3v^2 + 5u^2 + C)dv,$$

welches die Prüfung nach (94. §.) aushält. Nach (II. B. 60. §.) ist demnach:

$$y = 5vu^2 + v^3 + Cv + D.$$

107. §.

7. Zusatz. Gehen bey dem gegebenen Exponenten d^2y die Exponenten d^2u, d^2v der Differentio-Differentialverhältnisse beyder veränderlichen Größen u, v ab; so zeigt dieses an, daß beyde Exponenten du, dv ihrer ersten Differentialverhältnisse unveränderlich sind. Daher nehme man die Factoren ihrer Quadrate, etwa S, T, wenn Sdu^2, Tdv^2 bey ${}^2dy$ vorkömmt; integrire Sdu für die veränderliche Größe u, und Tdv für die veränderliche Größe v; setze hierauf $dy = \int Sdu + \int Tdv$, welches ganz richtig seyn wird, wofern es die Prüfung nach (94. §.) aushält: sonst ziehe man ${}^{uv}d(\int Sdu + \int Tdv)$ vom gegebenen Exponenten d^2y ab; integrire den Rest bloß für die veränderliche Größe u, oder für v, damit das Integral, für irgend eine Größe X, Xdv im ersten, und Xdu im zweyten Falle gebe; die Summe $\int Sdu + \int Tdv + Xdv$ (oder Xdu) wird dy geben, wenn sie die Prüfung nach (94. §.)

aus-

aushält. Indessen muß man dazu allemal noch zwo Constanten Cdu, Ddv nehmen: alles aus Gründen (96. 98. 99. §.).

Beyspiele.

Sey $d^2y = 42u^5v^3du^2 + 42u^6v^2dudv + 6u^7vdv^2$.

$dy = du\int 42u^5v^3du + dv\int 6u^7vdv$

$= 7u^6v^3du + 3u^7v^2dv + Cdu + Ddv$

Daher nach (II. Band. 60. §.)

$y = u^7v^3 + Cu + Dv + E$.

Sey $d^2y = 2dv^2$.

Hier ist $dy = dv\int 2dv + du\int 0 \cdot du$

$= 2vdv + Cdu + Ddv$.

Und nun nach (II. Band. 60. §).

$y = v^2 + Cu + Dv + E$.

Sey $d^2y = 10vdu^2 + 20ududv + 6vdv^2$.

Hier sollte seyn

$dy = du\int 10vdu + dv\int 6vdv$,

$= 10vudu + 3v^2dv$.

Es ist aber

$d^2y - {}^{uv}d(10vudu + 3v^2dv) = 10ududv$,

und $dv\int 10udu = 5u^2dv$:

also setze man

$dy = 10vudu + 3v^2dv + 5u^2dv + Cdu + Ddv$.

Und nun nach (II. Band. 60. §.)

$y = 5u^2v + v^3 + Cu + Dv + E$.

108. §.

8. Zusatz. Außer den Exponenten d^2y von der bisher betrachteten Form kommen bey der Anwendung der Differential-

rentialrechnung auf die Auflösung mathematischer Aufgaben solche Exponenten vor, mit welchen man zuerst verschiedene Verwandlungen vornehmen muß, die Methode, nach welcher sie sich mögen integriren lassen, zu entdecken. In manchen Fällen wird man die Exponenten du, dv als veränderliche Größen mit einzelnen Buchstaben bezeichnen können, wodurch z. B. $du = z$, $dv = t$, daher $d^2u = dz$ und $d^2v = dt$ erhalten wird; und wenn dieses bey dem gegebenen Exponenten d^2y geschieht; so wird bisweilen d^2y die Form eines Exponenten dZ des ersten Differentialverhältnisses erhalten, da dann alles noch darauf ankommen muß, daß er sich nach der im zweyten Bande für solche Differentialexponenten bereits gegebenen Anleitung integriren lasse. Zuweilen erreicht man dieselbe Absicht, wenn man gewisse Quotienten, wie $\frac{du}{dx}$ als veränderliche Größen betrachtet, vorzüglich alsdann, wenn man weiß, daß dx constans ist, in welchem Fall $\frac{d^2u}{dx} = dz$ für $\frac{du}{dx} = z$ seyn würde.

Z. B. Bey $d^2y = dudv + ud^2v$, weil du constans ist, kann man $dv = z$, $d^2v = dz$ setzen, welches $d^2y = zdu + udz$ giebt; und hieraus erhellet schon nach (73. 100. §.), daß $\int d^2y = \int (zdu + udz)$, oder $dy = zu = udv = udv + Cdu$ (99. §.) seyn muß.

Bey $dV = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{dy^2}$ könnte man $dx = u$, $dy = v$, mithin $d^2x = du$ und $d^2y = dv$ nehmen, wofür man

man $dV = \frac{vdu - udv}{v^2}$, und hieraus $V = \frac{u}{v} = \frac{dx}{dy}$ erhalten würde.

109. §.

9. Zusatz. Die Umstände, in welchen die Integralien der Exponenten d^2y von der Form $d^2y = kdudv$ unmöglich sind, verdienen bemerkt zu werden. Für jede Function y von u, v muß $dy = Mdu + Ndv$, und $d^2y = pdu^2 + Kdudv + sdv^2$ seyn, wenn man annimmt, daß beyde du, dv unveränderlich sind, mithin $d^2u = o$ und $d^2v = o$ ist; es soll ferner $p = \frac{{}^u dM}{du}$, $s = \frac{{}^v dN}{dv}$, $k = \frac{{}^v dM}{dv} + \frac{{}^u dN}{du}$ seyn (96. §.). Soll also $d^2y = kdudv$ werden; so muß $\frac{{}^u dM}{du} = o$ und $\frac{{}^v dN}{dv} = o$ seyn, welches nur alsdenn geschehen kann, wenn weder M von u, noch N von v abhängt: also muß

1) sowohl M als N eine beständige Größe; oder

2) M eine Function von v unabhängig von u, und N eine beständige Größe, oder M eine beständige Größe, und N eine von v unabhängige Function von u, oder

3) M eine Function von v, unabhängig von u, und N eine Function von u, unabhängig von v, seyn.

Das Erste (1) kann nicht Statt finden, weil sonst auch $k = o$ seyn würde, wegen ${}^v dM = o$, ${}^u dN = o$. Es kann aber auch das Zweyte (2) nicht Statt finden, wenn d^2y integrabel ist; Denn es könnte bey der Voraussetzung (2) nicht $\frac{{}^v dM}{dv} = \frac{{}^u dN}{du}$ seyn, welches doch allemal Statt haben soll

(92.

(92. §.). Man muß also (3) gelten lassen. Soll demnach $d^2y = k\,du\,dv$ sich integriren lassen; so muß, wegen $\frac{{}^v dM}{dv} = \frac{{}^u dN}{du}$ bey $dy = Mdu + Ndv$ (92. §.), $k = \frac{{}^v dM}{dv} + \frac{{}^u dN}{du} = 2\frac{{}^v dM}{dv} = 2\frac{{}^u dN}{du}$ entweder eine Function von u allein, oder eine Function von v allein, oder die Summe zwoer Functionen, der einen von u, und der andern von v seyn. Ist wirklich $k = U$ eine Function von u allein, oder $k = V$ eine Function von v allein, oder $k = U + V$; so hat man eigentlich $d^2y = Udu dv$ im ersten, $d^2y = Vdu dv$ im zweyten, und $d^2y = Udu dv + Vdu dv$ im dritten Fall, und dafür erhält man $dy = dv\int Udu + Cdv + Ddu$ im ersten, $dy = du\int Vdv + Cdv + Ddu$ im zweyten, und $dy = dv\int Udu + du\int Vdv + Cdv + Ddu$ im dritten Fall, die Constanten Cdv, Ddu wegen (99. §.) mit gerechnet.

110. §.

Erklärung. Jede Gleichung $M\,du + N\,dv = 0$ zwischen den Exponenten du, dv der ersten Differentialverhältnisse zwoer veränderlichen Größen u, v wird eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung, oder schlechthin eine Differentialgleichung genannt. Hingegen heißt jede Gleichung von der allgemeinen Form $M\,d^2u + N\,d^2v + k\,du\,dv + p\,du^2 + s\,dv^2 = 0$ zwischen der Exponenten d^2u, d^2v der zweyten Differentialverhältnisse zwoer veränderlichen Größen u, v eine Differentio-Differentialgleichung, oder eine Differentialgleichung von der zweyten Ordnung.

111. §.

Zusatz. Man kann sich die Vorstellung machen, daß jede Differentialgleichung $Mdu+Ndv=o$ aus einer Gleichung $Z=C$ zwischen den veränderlichen Größen u, v und einer Constante C (allenfalls auch $C=o$) entstehet, so daß $^{uv}dZ=Mdu+Ndv$ ist; und eben daraus auch eine Differentio-Differentialgleichung $Md^2u+Nd^2v+kdudv+pdu^2+sdv^2$ entstehet; so daß $^{uv}d^2Z=^{uv}d.^{uv}dZ=^{uv}d(Mdu+Ndv)=Md^2u+Nd^2v+kdudv+pdu^2+sdv^2$ ist (110. §.).

112. §.

Erklärung. Die Gleichung $Z=C$ zwischen den veränderlichen Größen u, v und einer Constante C, aus welcher eine Differential- oder Differentio-Differentialgleichung $dy=o$, oder $d^2y=o$ entstanden seyn mag, so daß diese durch $^{uv}dZ=o$ oder $^{uv}d^2Z=o$ vollkommen hergestellt wird, ist das Integral von $dy=o$ oder $d^2y=o$.

113. §.

1. Zusatz. Die Differentialgleichungen $Mdu+Ndv=o$ von der ersten Ordnung können also nach (II. Band. 61. 62. 63. 64. §.) integrirt werden: ist die daselbst gegebene Anleitung nicht hinreichend; so kann man doch die Integralgleichung (112. §.) wenigstens durch eine Näherung bestimmen.

114. §.

2. Zusatz. Die veränderlichen Größen u, v bey einer Differentialgleichung $Mdu+Ndv=o$ sind nämlich von einander abhängig, so daß eine unter ihnen, etwa u, als

eine Function von der andern v kann betrachtet werden (82. §.): wenn man demnach indessen einen unbestimmten Exponenten a nimmt, $u = Av^{a} + Bv^{a+1} + Cv^{a+2} + Dv^{a+3}$ + etc., daher $du = (aAv^{a-1} + (a+1)Bv^{a} + (a+2)Cv^{a+1} + (a+3)Dv^{a+2} + \text{etc})dv$, hernach diese Werthe statt u und du in $Mdu + Ndv = 0$ setzt; so erhält man dadurch eine Gleichung, aus welcher, sobald man a wird gehörig bestimmt haben, sich die Coefficienten A, B, C, D, etc. werden herleiten lassen. So kann man sich also der Function u von v nähern, welche dem unbekannten Integral von $Mdu + Ndv = 0$ entsprechen soll (112, 113. §.)

Z. B. Sey $du + udv - \alpha v^{n}dv = 0$.

Für $u = Av^{a} + Bv^{a+1} + Cv^{a+2} + \text{etc.}$, erhält man aus der gegebenen Gleichung:

$$\left.\begin{matrix} aAv^{a-1} + (a+1)Bv^{a} + (a+2)Cv^{a+1} + (a+3)Dv^{a+2} + \text{etc.} \\ -\alpha v^{n} \quad + Av^{a} \quad + Bv^{a+1} \quad + Cv^{a+2} + \text{etc.} \end{matrix}\right\} = 0.$$

Daher nehme man $a - 1 = n$, und $a = n + 1$; so wird man haben:

$$\left.\begin{matrix} (n+1)Av^{n} + (n+2)Bv^{n+1} + (n+3)Cv^{n+2} + \text{etc.} \\ -\alpha v^{n} \quad + Av^{n+1} \quad + Bv^{n+2} + \text{etc.} \end{matrix}\right\} = 0.$$

Hieraus findet man die Werthe von A, B, C, etc. für welche, und $a = n + 1$, entstehet endlich:

$$u = \frac{\alpha v^{n+1}}{n+1} - \frac{\alpha v^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{\alpha v^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{\alpha v^{n+4}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \text{etc.} + \text{Const.}$$

115. §.

3. Zusatz. Will man das Integral einer Differentio-Differentialgleichung $^{uv}d^2y = 0$ suchen: so sehe man, ob es nicht möglich ist das Integral $\int {}^{uv}d^2y$ nach (105 - - 109. §.) zu bestimmen, woraus das Integral $\int {}^{uv}d^2y = 0$ der gegebenen Gleichung $^{uv}d^2y = 0$ entstehen würde. (112. §.). Oder man versuche, ob es nicht möglich ist, durch gewisse Kunstgriffe, wie z. B. die in (108. §.) erklärten sind, der gegebenen Differentio-Differentialgleichung $^{uv}d^2y = 0$ die Form einer Differentialgleichung $dZ = 0$ zu geben: kann dieses geschehen, so wird man daraus $Z = 0$ zum Integral nach (113. 114. §.) suchen können, und weil $Z = 0$ eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung ist, so wird man auch diese nach (113. 114. §.) integriren können. In dem bestimmten Fall, wenn bey einer Differentio-Differentialgleichung $^{uv}d^2y = 0$ der Exponent dv des ersten Differentialverhältnisses von einer veränderlichen Größe v unveränderlich, mithin $d^2v = 0$ ist, muß die andere veränderliche Größe u eine Function von v seyn (114. §.), und diese Function, so wie auch die Function v von u, welche aus jener durch Umkehrung entstehen würde (II. Band. 10. §.), läßt sich aus der gegebenen Gleichung $^{uv}d^2y = 0$ nach einer besondern Methode herleiten, welche, ob sie gleich nicht allgemein ist, in manchen Fällen ihre Anwendung findet: wir wollen daher die merkwürdigsten darunter bezeichnen.

116. §.

Aufgabe. Die Größen U, V, X sind unabhängig von der veränderlichen Größe u, übrigens beständige

dige Größen, oder was immer für Functionen von der veränderlichen Größe v, und zwar alle, oder einige: man soll die Function u von v suchen, für welche die Differentio-Differentialgleichung $d^2u + Ududv + Vdu^2 + Xdv^2 = 0$ Statt haben soll.

Auflösung. 1. Weil u eine Function von v ist, so setze man wegen (58. 79. 80. §.)

$$du = pdv,\ dp = qdv,\ d^2u = qdv^2.$$

2. Für diese Werthe von du und d^2u übergeht die gegebene Gleichung in

$$qdv^2 + Updv^2 + Vp^2dv^2 + Xdv^2 = 0:$$

also ist

$$q + Up + Vp^2 + X = 0,$$
$$q = -(Up + Vp^2 + X).$$

3. Aus (1) 2) erhält man $0 = dp + (Up + Vp^2 + X)\,dv$. Diese Gleichung enthält, vermöge der Voraussetzung, nur die veränderliche v bey U, V, X, p: sie soll sich daher nach der bekannten Theorie (113. 114. §.), wenigstens durch Näherung, integriren lassen. Fände man nun wirklich das Integral davon; so gäbe dieses p durch v, und wenn man hierauf denselben Ausdruck von p durch v in (1) nähme; so würde man auch $du = pdv$ nach der gemeinen Theorie integriren, und eben dadurch auch die verlangte Function u von v bestimmen können.

117. §.

1. Zusatz. Ist $U = V = 0$ in (116. §.), so hat man daselbst $dp = -Xdv$: also $p = C - \int Xdv$; und nun $du = Cdv - dv\int Xdv$. Bey jeder Differentio-Differentialgleichung von der Form

d^2u

$$d^2u + Xdv^2 = 0 \text{ ist also}$$

$$u = Cv - \int dv \int X dv + B$$

für jede beständige Größe X, und jede Function X von v.

118. §.

2. Zusatz. Setzt man U = X = 0 in (116. §.); so findet man daselbst $d^2u + Vdu^2 = 0$, $du = pdv$, $dp = -Vp^2dv$; also ist $\frac{dp}{p^2} = -Vdv$, mithin $p = \frac{1}{\int Vdv + C}$, und nun $du = \frac{dv}{\int Vdv + C}$. Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form

$$d^2u + Vdu^2 = 0 \text{ ist}$$

$$u = \int \frac{dv}{\int Vdv + C} + B,$$

es mag V eine beständige Größe, oder was immer für eine Function von v seyn.

3. B. Für eine unveränderliche Größe V = a wäre

$$d^2u + adu^2 = 0,$$

$$u = \int \frac{dv}{\int adv + C} + B = \int \frac{dv}{av + C} + B;$$

$$\text{also } u = \frac{1}{a} \text{Log.} (av + C) + B.$$

Für V = av hätte man

$$d^2u + avdu^2 = 0,$$

$$u = \int \frac{dv}{\frac{a}{2} v^2 + C} + B,$$

und dieses Integral läßt sich für jede bejahte und verneinte beständige Größe a leicht bestimmen.

119. §.

3. Zusatz. Ferner setze man $V=X=0$; so erhält man aus (116. §.) $d^2u+Ududv=0$, $du=pdv$, $dp=-Updv$, daher $\frac{dp}{p}=-Udv$: also $\text{Log. } p=C-\int Udv$, und nun, für die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen, $p=e^{C-\int Udv}$. Demnach ist $du=(e^{C-\int Udv})dv$. Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form

$$d^2u+Ududv=0 \text{ ist daher}$$

$$u=\int dv \,.\, e^{C-\int Udv}+B,$$

es mag U eine beständige Größe, oder was immer für eine Function von v seyn.

120. §.

4. Zusatz. Wären $U=a$, $V=b$, $X=c$ beständige Größen in (116. §.), daher

$$\text{I. } d^2u+adudv+bdu^2+cdv^2=0.$$

$$\text{II. } dp=-(ap+bp^2+c)dv.$$

$$\text{III. } du=pdv.$$

So wäre $\int\frac{dp}{bp^2+ap+c}=C-v$.

Da nun dieses Integral sich wirklich nach der im zweyten Bande gegebenen Anleitung durch p bestimmen läßt; so ist einleuchtend, daß man für jede Differentio-Differentialgleichung (1) einen Ausdruck von p durch v, daher auch, wegen (III) der derselben Gleichung entsprechenden Function u von v, wenigstens durch eine hinreichende Näherung bestimmen kann.

121. §.

5. Zusatz. Für b=o im (120. §.) wäre $\frac{dp}{ap+c} = -dv$, daher Log. (ap+c)=C−av; und nun, für die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen, $ap+c=e^{C-av}$, folglich $p=\frac{e^{C-av}-c}{a}$, und (120. §.) $du=\left(\frac{e^{C-av}-c}{a}\right)dv$.

Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$d^2u+adudv+cdv^2=o$ ist also

$$u=D-\frac{(acv+e^{C-av})}{a^2}.$$

122. §.

6. Zusatz. Man setze c=o in (120. §.); so erhält man

$$C-v=\int\frac{dp}{bp^2+ap}=\frac{lp-l(a+bp)}{a};$$

also kann man annehmen, es sey

$$\text{Log.}\ \frac{p}{a+bp}=C-av.$$

Und nun für die Grundzahl e der natürlichen Logarithmen,

$\frac{p}{a+bp}=e^{C-av}$, welches giebt

$p=\frac{ae^{C-av}}{1-be^{C-av}}$. Daher in (120. §.)

$$du=\frac{dv.ae^{C-av}}{1-be^{C-av}}.$$

Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u+adudv+bdu^2=0 \text{ ist also}$$

$$u=\int\frac{dv.\,ae^{C-av}}{1-be^{C-av}}+B.$$

123. §.

Aufgabe. Die Größen U, V, X sind von der veränderlichen Größe v unabhängig, übrigens, alle oder einige, entweder beständige Größen, oder was immer für Functionen von der veränderlichen Größe u: man soll v durch u aus der Differentio-Differentialgleichung $d^2u+Ududv+Vdu^2+Xdv^2=0$ bestimmen.

Auflösung. 1. Im (116. §.) hatten wir $du=pdv$, und $0=dp+(Up+Vp^2+X)dv$.

2. Daselbst ist zwar u als eine Function von v betrachtet worden: wenn doch v nun diejenige Function von u bedeutet, welche aus jener durch Umkehrung entstehen würde; so kann man nach (75. §.) in (1.) auch $dv=\frac{du}{p}$ setzen.

3. Aus (1) 2) hat man nun folgende Differentialgleichung zwischen p, u, dp, du.

$$pdp+(Up+Vp^2+X)du=0.$$

4. Diese Gleichung (3), weil U, V, X von keiner andern veränderlichen Größe, als von u, abhängen können, läßt sich nun, wenigstens durch Näherung, nach (113. 114. §.) integriren, wodurch eine Gleichung zwischen p und u entstehen würde; daraus ließe sich demnach ein Ausdruck

für

für p durch u herleiten, und wenn man hernach denselben in (2) nähme: so könnte man nach der bekannten Theorie nun auch v durch u bestimmen.

124. §.

1. Zusatz. Für V=X=0 in (123. §.) wäre dp=−Udu $p=C-\int Udu$; daher $dv=\frac{du}{C-\int Udu}$. Bey jeder Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u+Ududv=0 \text{ ist also}$$

$$v=\int\frac{du}{C-\int Udu}+B,$$

es mag U eine beständige Größe, oder was immer für eine Function von u seyn.

125. §.

2. Zusatz. Setzt man aber U=X=0 in (123. §.); so erhält man $\frac{dp}{p}=-Vdu$; Log. $p=C-\int vdu$, und nun $p=e^{C-\int Vdu}$; daher $dv=\frac{du}{e^{C-\int Vdu}}$. Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u+Vdu^2=0 \text{ ist also}$$

$$v=\int\frac{du}{C-\int Vdu}+B,$$

es mag V eine beständige Größe, oder irgend eine Function von u seyn.

126. §.

3. Zusatz. Ist ferner U=V=0 in (123. §.); so ist $pdp=-Xdu$, $\frac{p^2}{2}=C-\int Xdu$, $p=\sqrt{(C-2\int Xdu)}$,

wegen der unbestimmten Constante; daher $dv = \frac{du}{\sqrt{(C - 2\int X du)}}$.
Für jede Differentio-Differentialgleichung von der Form:

$$d^2u + Xdv^2 = 0 \text{ ist also}$$

$$v = \int \frac{du}{\sqrt{(C - 2\int X du)}} + B,$$

es mag X eine beständige Größe, oder was immer für eine Function von u seyn.

127. §.

4. Zusatz. Seyen $U = a$, $V = b$, $X = c$ beständige Größen; so ist in (123. §.)

$$\text{I. } dv = \frac{du}{p}.$$

$$\text{II. } \frac{pdp}{bp^2 + ap + c} = -du.$$

Nun kann man (II) nach der im zweyten Bande gegebenen Anleitung vollständig integriren: aus dem bestimmten Integral kann man hernach einen Ausdruck für P durch u herleiten: setzt man denselben Ausdruck in (I), so wird man nach der bekannten Theorie auch v durch u bestimmen. Auf diese Art läßt sich also aus jeder Differentio-Differentialgleichung

$$d^2u + adudv + bdu^2 + cdv^2 = 0$$

eine Gleichung zwischen u und v finden.

128. §.

5. Zusatz. In dem besondern Fall, wenn $c = 0$ in (127. §.) wäre, fände man $p = \frac{e^{C - bu} - a}{b}$: also

v =

$$v = \int \frac{bdu}{e^{C-bu} - a}$$

für $d^2u + adudv + bdu^2 = 0$.

129. §.

6. Zusatz. Und wenn $a = 0$ in (127. §.) wäre; so erhielte man $p = \frac{\sqrt{(e^{C-2bu} - c)}}{\sqrt{b}}$: also allemahl

$$v = \int \frac{du\sqrt{b}}{\sqrt{(e^{C-2bu} - c)}}$$

für $d^2u + bdu^2 + cdv^2 = 0$.

130. §.

Aus (116 — 129. §.) erhellet demnach, daß es keine Differentio-Differentialgleichung von der Form $Pd^2u + Qdudv + Rdu^2 + Sdv^2 = 0$ geben kann, die sich nach der bereits bekannten Theorie nicht integriren ließe, sobald alle Größen P, Q, R, S dergestalt beschaffen sind, daß für sie, wenn man die ganze Gleichung durch P dividirt, sie daher in $d^2u + \frac{Q}{P}dudv + \frac{R}{P}du^2 + \frac{S}{P}dv^2 = 0$ verwandelt, gewisse entweder von u, oder von v ganz unabhängige Größen $\frac{Q}{P}$, $\frac{R}{P}$, $\frac{S}{P}$ entstehen müssen.

Der III. Abschnitt.

Von den Grundformuln, worauf die Anwendung der Differentialverhältnisse auf die höhere Geometrie und Mechanik beruhet.

131. §.

Erklärung.

1. Fig. Sey OMS eine krumme Linie; UV die Abscissenlinie; C der Anfangspunkt der Abscissen; CP eine Abscisse, und MP die damit unter was immer für einem Coordinatenwinkel MPC verbundene Ordinate. Die gerade Linie Bp berrühre die krumme Linie OS in M, und schneide zugleich die Abscissenlinie UV in B; eine andere MN sey in M auf Bp senkrecht, und schneide die Abscissenlinie UV in N. Endlich schneide die gerade Linie Rm die krumme Linie OS in den Punkten M, m, und die Abscissenlinie UV in R. Nun heißt MB die dem Punkte M zugehörige Tangente, BP Subtangente, MN Normallinie, PN Subnormallinie, und MR Secante, RP aber die Subsecante.

132. §.

1. Zusatz. Wenn man die rechtwinklichte Ordinate $MP = y$ (II. Band. 87. §.) als eine Function von der Abscisse $CP = x$ als einer absoluten veränderlichen Größe betrachtet (46. §.), welche, wenn $CP = x$ um $PQ = \Delta x$ wächst, in $mQ = y'$ übergehen, und um $y' - y = mQ - MP = mq = \Delta y$ zunehmen mag, hernach durch M, m die Secante RM ziehet (131. §.); so ist $mq : Mq = MP : RP$, oder $\Delta y : \Delta x = y : RP$, nämlich: das Verhältniß der

der Differenz der Ordinate gegen die Differenz der Abscisse ist dem Verhältnisse der Ordinate gegen die mit der Differenz der Abscisse verbundene Subsecante gleich.

133. §.

2. Zusatz. Wenn $\Delta x = PQ$ beständig abnimmt (47. §.) so nähert sich die Subsecante RP der Subtangente BP (131. §.) als ihrer Gränze (48. §.), daher nähert sich dabey das Verhältniß $y:RP$ dem Verhältnisse $y:BP$ als seiner Gränze (88. §. Anm. VI.): das Verhältniß $y:BP$ der Ordinate gegen die Subtangente ist also das Differentialverhältniß der Ordinate y als einer Function von der Abscisse x, und sein Exponent $dy = \frac{y}{BP}$ (132. 52. §.), statt dessen man $dy = \frac{y\,dx}{BP}$ setzen kann (55. §.).

134. §.

Aufgabe. Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $y = MP$, $x = CP$ einer krummen Linie OMS ist gegeben, man soll die ihnen zugehörige Subtangente, Subnormallinie, Tangente, Normallinie, und die Lage der Tangente und Normallinie gegen die Ordinate und Abscissenlinie bestimmen.

Auflösung. Die Subtangente folgt in I) aus (133. §.), und durch sie findet man die Subnormallinie $PN = \frac{MP^2}{BP}$ (in II), nebst der Tangente $MB = \sqrt{(MP^2 + BP^2)}$ in III); aus II) aber ergiebt sich die Normallinie $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)}$ in IV). Die Lage der Tangente gegen

die Ordinate, und der Normallinie gegen die Abscissenlinie hängt vom Winkel BMP=MNP ab, wofür ist Tang. BMP $= \text{Tang. MNP} = \frac{BP}{MP}$, welches aus I) wie in V) bestimmt wird. Die Lage endlich der Tangente gegen die Abscissenlinie, und der Normallinie gegen die Ordinate hängt vom Winkel MBP=PMN ab, wofür ist Tang. MBP $= \text{Tang. PMN} = \frac{MP}{BP}$, welches ebenfalls aus I) wie in VI) gefunden wird.

$$\text{I. } BP = \frac{ydx}{dy}.$$

$$\text{II. } PN = \frac{ydy}{dx}.$$

$$\text{III. } MB = \frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dy}.$$

$$\text{IV. } MN = \frac{y\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}{dx}.$$

$$\text{V. Tang. BMP} = \text{Tang. MNP} = \frac{dx}{dy}.$$

$$\text{VI. Tang. MBP} = \text{Tang. NMP} = \frac{dy}{dx}.$$

Beyspiele an Kegelschnitten, welche ich im zweyten Bande (104. 105. 106. §.) angeführt habe, sind hinreichend, den Gebrauch dieser Formuln zu erläutern. In (132. §.), worauf doch alles beruhet, haben wir zwar vorausgesetzt, daß die krumme Linie von der Beschaffenheit ist, daß ihre Ordinate y zunehmen muß, wenn die Absciſſe x zunimmt: es ist aber für sich klar genug, daß die

dorti-

dortigen Schlüsse auch für den Fall gelten, wenn die Ordinate, bey zunehmender Absciße, abnimmt, nur muß man in solchen Fällen dy mit entgegengesetzten Zeichen nehmen.

135. §.

Erklärung. Ein Kreisbogen Mb berührt von innen eine krumme Linie MO im Punkte M, wenn er ganz innerhalb der krummen Linie MO liegt, wie immer er auch und die krumme Linie selbst nach der Gegend O verlängert wird. Hingegen wird die krumme Linie MO von einem Kreisbogen Mk im Punkte M von außen berührt, wenn er ganz außerhalb der krummen Linie MO liegt. 2. Fig.

136. §.

1. Zusatz. Wenn irgend ein, etwa aus dem Puncte c der geraden Linie MV mit dem Halbmesser cM beschriebener, Kreis Mb, oder Mk die krumme Linie MO von innen oder außen berührt; so giebt es unzählbare Kreise, welche die krumme Linie MO von innen, oder außen berühren können, gewiß alle, welche aus den innerhalb des Halbmessers cM im ersten Fall, oder außerhalb desselben liegenden Mittelpuncten im zweyten Fall sich beschreiben lassen (135. §.).

137. §.

2. Zusatz. Ist TS eine gemeinschaftliche Tangente der krummen Linie MO und eines sie von innen oder außen in M berührenden Kreises Mb oder Mk (135. 136. §.); so ist die an M nächste Ablenkung der krummen Linie MO von der Tangente MS größer, als die an M nächste Ablenkung des Kreisbogens Mk, und kleiner als die an M nächste Ab-

lenkung

lenkung des Kreisbogens Mb von derselben Tangente MS; die krumme Linie MO krümmet sich im Punkte M stärker, als der Kreisbogen Mk, und schwächer, als der Kreisbogen Mb; der Unterschied aber zwischen den an M nächsten Ablenkungen der krummen Linie MO und des sie in M berührenden Kreisbogens Mk oder Mb von der gemeinschaftlichen Tangente MS, daher auch der Unterschied der Krümmungen der krummen Linie MO, und des sie in M berührenden Kreisbogens Mk oder Mb ist im Punkte M um so kleiner, je näher der Kreisbogen Mk oder Mb an MO liegt.

138. §.

3. Zusatz. Stellt man sich unter allen Kreisen, welche eine krumme Linie MO im Punkte M von innen oder außen berühren mögen (136. §.), einen vor, der so nahe an der krummen Linie MO liegen mag, daß zwischen ihm und der krummen Linie MO kein anderer Kreisbogen liegen kann, der diese an demselben Punkte berührte, und sonst nirgends zwischen M und O schnitte; so ist seine an M nächste Ablenkung von der Tangente MS mit der an M nächsten Ablenkung der krummen Linie MO von der Tangente MS gleich groß; jener Kreis krümmt sich im Punkte M eben so stark, als die krumme Linie MO (137. §.); aus diesem Grunde wird ein solcher Kreis der dem Puncte M der krummen Linie MO zugehörige **Krümmungskreis**, und sein Halbmesser der **Krümmungshalbmesser** genannt.

Man lese Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik. 2ten Theils 2te Abtheil. IV. Abschnitt; und mathematische Abhandlungen. 5te Abhandlung.

139. §.

139. §.

4. Zusatz. Unter allen eine krumme Linie MO von innen im Puncte M berührenden Kreisen der größte, oder unter allen sie in M von außen berührenden Kreisen der kleinste ist der dem Puncte M zugehörige Krümmungskreis (136. 138. §.). Auf diesem Grunde beruht die Methode, nach welcher der Krümmungskreis für irgend eine Stelle M einer krummen Linie MO kann aufgesucht werden.

140. §.

Wenn die gerade Linie MV zur Abscissenlinie genommen wird, und die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten Mp=x, mp = y einer krummen Linie MO bekannt ist; so kann man ganz unabhängig von der Differentialrechnung entscheiden, ob es für die Stelle M einen Krümmungskreis, dessen Mittelpunct irgendwo in c liegen mag, wirklich giebt, und wie groß sein Halbmesser Mc ist. Ich will dieses durch ein Beyspiel erläutern, und dabey einige wesentliche, die Natur des Krümmungskreises betreffende, Umstände näher erwägen.

I. Die Gleichung für die krumme Linie MO zwischen ihren rechtwinklichten Coordinaten Mp=x, mp=y sey $y^2 = Ax \pm Bx^2$, so daß hier auch $B = 0$, aber nicht $B > 1$ seyn kann.

II. Die Gleichung für jeden Kreis, wenn sein Halbmesser r heißt, ist $y^2 = 2rx - x^2$.

III. Giebt es nun einen mit irgend einem Halbmesser r=Mc zu beschreibenden Kreisbogen Mb, welcher die

krumme

krumme Linie MO in M von jenen berühren würde; so muß ihm für jede Abscisse Mp eine kleinere Ordinate np als der krummen Linie MO zugehören; sein Halbmesser $Mc = r$ muß daher so groß seyn, daß dafür auch $np^2 < mp^2$ werde: also nach I) II).

$$2rx - x^2 < Ax \pm Bx^2,$$
$$\text{und } r < \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}(1 \pm B)x.$$

IV. Vermöge der Voraussetzung (I) ist B gewiß nicht größer als 1: also ist $\frac{1}{2}(1 \pm B)x$ allemal bejaht. Jeder Kreis also, den man mit einem Halbmesser $r = \frac{1}{2}A$, oder $r < \frac{1}{2}A$ beschriebe, würde die krumme Linie MO in M berühren (III), und unter allen wäre der Kreis Mb für den Halbmesser $Mc = r = \frac{1}{2}A$ der größte (III), mithin der Krümmungskreis (139. §.)

V. Der mit dem Halbmesser $Mc = r = \frac{1}{2}A$ beschriebene Kreis Mb würde nämlich so nahe an der krummen Linie MO liegen, daß zwischen ihm und dieser Linie kein anderer Kreis Me liegen könnte, der die krumme Linie in M berührte, und nirgends zwischen M und O schnitte (138. §.).

Denn ein solcher Kreis müßte doch einen größeren Halbmesser $M\delta = Mc + c\delta = \frac{1}{2}A + c\delta$ haben, wie immer auch der Unterschied $c\delta$ klein seyn möchte. Nun aber wäre eine Abscisse $Mp = x = \frac{2c\delta}{1 \pm B}$, und eine andere $Mq = x < \frac{2c\delta}{1 \pm B}$ möglich.

$$\text{Für } x = \frac{2c\delta}{1 \pm B} \text{ wäre auch}$$

$$x \pm Bx = 2c\delta, \text{ und } \pm Bx = 2c\delta - x:$$

also $\sqrt{(Ax \pm Bx^2)} = \sqrt{(2(\frac{1}{2}A + c\delta)x - x^2)}$.

Für

Für $x < \frac{2c\delta}{1 \pm B}$ wäre auch

$x \pm Bx < 2c\delta$, und $\pm Bx < 2c\delta - x$:

also $\sqrt{(Ax \pm Bx^2)} < \sqrt{(2(\frac{1}{2}A + c\delta)x - x^2)}$.

Das heißt, wegen (I) (II), im ersten Fall würde die Ordinate des Kreises Me so groß als die Ordinate der krummen Linie MO, im zweyten Fall aber würde sie größer als diese seyn: der Kreis Me würde also die krumme Linie MO im Puncte m schneiden, an welchem sie von ihrer der Abscisse $Mp = \frac{2c\delta}{1 \pm B}$ zugehörigen Ordinate mp geschnitten wird.

VI. Für die gemeine Parabel MO und ihre Axe MV ist, $B = 0$, und A der Parameter in (1) nach (II. Band. 95. §.): der dem Scheitel A zugehörige Krümmungshalbmesser ist also $MC = \frac{1}{2}A$ (IV) dem halben Parameter gleich.

Wenn aber die krumme Linie MO ein elliptischer oder hyperbolischer Bogen ist, und MV seine Axe; so ist nach (II. Band. 96. 97. §.) $A = \frac{b^2}{a^2}$, $B = \frac{b^2}{a}$ in (I): der dem Scheitel M der Ellipse und Hyperbel zugehörige Krümmungshalbmesser ist also $Mc = \frac{1}{2}A = \frac{b^2}{2a}$ (IV) $= \frac{1}{2}p$ (II. Band. 99. §.), daher ebenfalls dem halben Parameter gleich.

VII. Jeder Abscisse $Mp = x$ gehört beym Krümmungskreise Mb (IV) eine Ordinate np zu, deren Quadrat ist nach (II) $np^2 = 2(\frac{1}{2}A)x - x^2 = Ax - x^2$.

Der-

VIII. Derselben Abscisse $Mp = x$ gehört bey der krummen Linie MO die Ordinate mp so genommen, daß ihr Quadrat $mp^2 = Ax \pm Bx^2$ ist (1).

IX. Die Differenz der Quadrate (VII) VIII) ist also allemal $mp^2 - np^2 = (1 \pm B) x^2$ etwas bejahtes, weil, vermöge der Voraussetzung, B nicht größer als 1 ist: jeder Abscisse $Mp = x$, sie mag wie immer klein genommen werden, wenn sie nur noch ein Stück von MV, und kein Punkt ist, gehören beym Krümmungskreise Mb und bey der krummen Linie MO verschiedene Ordinaten np, mp zu.

X. Demnach ist nicht gestattet sich vom Krümmungskreise Mb die Vorstellung zu machen, daß er ein an M so nahe liegender Kreis ist, daß ein Theilchen von ihm mit einem von der krummen Linie MO an M zusammenfällt, es mag ein solches Theilchen wie immer klein angenommen werden (IX): nichts macht Mb zum Krümmungskreise, als die in (IV) V) bewiesene Eigenschaft, welche bestehet, wenn es gleich keine Theilchen von Mb und MO giebt, die an M zusammen fielen.

141. §.

3. Fig. **Aufgabe.** Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $CP = x$, $MP = y$ einer krummen Linie OMS ist gegeben; man soll den Krümmungshalbmesser für die Stelle M finden.

Auflösung. 1. Die gerade Linie $B\beta$ berühre die krumme Linie OMS in M; so kann man den Winkel $BMP = \varphi$ und die Ordinate $MP = y$ als zwo Functionen von der Abscisse $CP = x$ als einer absoluten veränderlichen Größe betrachten.

2. Stellt man sich nun vor, die Abscisse $CP = x$ wachse um eine Differenz $Pp = \Delta x$; so übergehet dafür die Ordinate $MP = y$ in eine Ordinate $mp = y'$, und wenn $b\gamma$ die krumme Linie OMS in m berührt; so ist $bmp = \varphi'$ der Winkel, in welchen der Winkel $BMP = \varphi$ bey derselben Voraussetzung übergeht. Zieht man demnach Mq zu Pp, und mk zu MB parallel; so ist $mq = mp - MP = y' - y = \Delta y$, und $bmk = bmp - kmp = bmp - BMP = \varphi' - \varphi = \Delta \varphi$.

3. Die an M und m Normallinien seyen MN, mn; so sind βMN, bmn rechte Winkel (131. §.): wird also die Sehne Mm gezogen; so sind bmM, βMm, und Mmn, mMN spitzige Winkel. Daher müssen die Tangenten βM, bm einander irgendwo in a, und die Normallinien Mn, mn irgendwo in R schneiden, dergestalt, daß der Winkel $MRm = 90^\circ - kmR$ (im rechtwinklichten Dreyecke kmR) $= 90^\circ - (bmR - bmk) = 90^\circ - 90^\circ + bmk$; mithin $MRm = bmk = \Delta\varphi$ ist (2).

4. Man nehme nun an, daß es für die Stelle M der krummen Linie OMS wirklich einen Krümmungskreis Mz giebt, welcher aus einem gewissen Punkte c der Normallinie MN mit dem Halbmesser cM beschrieben die krumme Linie OMS in M so nahe berührt, von innen oder von außen, daß zwischen ihm und derselben krummen Linie kein Kreis liegen kann, der sie in M berührte, und nirgends zwischen M und S schnitte (138. §.); so muß er mit der krummen Linie OMS am Punkte M die gemeinschaftliche Tangente $B\beta$ haben, und die andere Normallinie mR irgend wo in u

schneiden, dergestalt, daß seine Tangente in u von der Tangente bγ der krummen Linie OMS in m unterschieden ist: wenn man sich also vorstellt, daß $\Delta x = Pp$ allmählich abnimmt, mithin der Punkt m immer näher gegen M rückt; so müssen auch die Punkte m, u immer näher gegen einander und den Punkt M rücken, die Tangente des Krümmungskreises Mz an u, und die der krummen Linie OMS an m, nähern sich der Tangente an M, und der Unterschied der Entfernungen MR, mR des Punkts R von M und m von der Normallinie uc=Mc des Krümmungskreises Mz wird immer kleiner, so daß jene sich dem Halbmesser Mc des Krümmungskreises Mc als ihrer Gränze nähern. Will man demnach entscheiden, ob es für die Stelle M wirklich einen Krümmungskreis Mz giebt; so muß man untersuchen ob die Entfernungen MR, mr sich, wenn Δx beständig abnimmt, einer bestimmten von Δx unabhängigen gemeinschaftlichen Gränze nähern, welche den Halbmesser Mc des Krümmungskreises Mz abgeben soll.

5. Im Dreyecke MRm hat man allemal

$$mR : Mm = \mathrm{Sin}\, mMR : \mathrm{Sin}\, MRm;$$

$$MR : Mm = \mathrm{Sin}\, MmR : \mathrm{Sin}\, MRm:$$

also $mR = \frac{Mm . \mathrm{Sin}\, mMR}{\mathrm{Sin}\, \Delta\varphi}$ nach (3)

$$MR = \frac{Mm . \mathrm{Sin}\, MmR}{\mathrm{Sin}\, \Delta\varphi}.$$

6. Nun ist $mMR = 90^\circ - Mmk = 90^\circ - (Mmq - kmp)$, daher $mMR = 90^\circ - (Mmq - \varphi)$ wegen (2): also ist $\mathrm{Sin}\, mMR = \mathrm{Cos}\, (Mmq - \varphi)$.

7. Ferner ist $MmR = 180° - (mMR - mRM)$: wegen (3) 6) ist also $MmR = 90° - (\varphi + \Delta\varphi - Mmq)$, daher $\sin MmR = \cos(\varphi + \Delta\varphi - Mmq)$.

8. Demnach findet man nach (I. Band. 156. §.) in (6) 7)

$$\sin mMR = \cos\varphi \cos Mmq + \sin\varphi \sin Mmq$$

$$\sin MmR = \cos(\varphi+\Delta\varphi) \cos Mmq + \sin(\varphi+\Delta\varphi) \sin Mmq.$$

9. Ferner ist im rechtwinklichten Dreyecke Mqm allemal

$$\sin Mmq = \frac{Mq}{Mm} = \frac{\Delta x}{Mm};$$

$$\cos Mmq = \frac{mq}{Mm} = \frac{\Delta y}{Mm}.$$

10. Aus (5) 8) 9) erhält man demnach folgende Ausdrücke für mR und MR.

$$mR = \frac{\Delta y \cos\varphi + \Delta x \sin\varphi}{\sin\Delta\varphi},$$

$$MR = \frac{\Delta y \cos(\varphi + \Delta\varphi) + \Delta x \sin(\varphi + \Delta\varphi)}{\sin\Delta\varphi}.$$

Daher nach (28. §.)

$$mR = \frac{\Delta y \cos\varphi + \Delta x \sin\varphi}{\Delta\varphi - \frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\Delta\varphi^5}{1\ldots5} - \frac{\Delta\varphi^7}{1\ldots7} + \text{etc.}}$$

$$MR = \frac{\Delta y \cos(\varphi + \Delta\varphi) + \Delta x \sin(\varphi + \Delta\varphi)}{\Delta\varphi - \frac{\Delta\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\Delta\varphi^5}{1\ldots5} - \frac{\Delta\varphi^7}{1\ldots7} + \text{etc.}}$$

 11. Nun

11. Nun kann man $\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\Delta x + \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3 +$ etc. für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten α, β, etc. setzen (59. §.): also müssen andere von Δx unabhängige Coefficienten e, f, g, etc. möglich seyn, wofür die Ausdrücke (10) sich in folgende würden verwandeln lassen.

$$mR = \frac{\Delta y \,\mathrm{Cos}\,\varphi + \Delta x \,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\frac{d\varphi}{dx}\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}}.$$

$$MR = \frac{\Delta y \,\mathrm{Cos}(\varphi + \Delta\varphi) + \Delta x \,\mathrm{Sin}(\varphi + \Delta\varphi)}{\frac{d\varphi}{dx}\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}}.$$

12. Da aber $\mathrm{Cos}(\varphi + \Delta\varphi)$ und $\mathrm{Sin}(\varphi + \Delta\varphi)$ zwoen Reihen gleich sind, wovon die ersten Glieder $\mathrm{Cos}\,\varphi$ und $\mathrm{Sin}\,\varphi$, die übrigen Glieder aber die Producte aus den Potenzen $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi^2$, $\Delta\varphi^3$, etc. in gewisse von $\Delta\varphi$ unabhängige Coefficienten seyn müssen (II. Band. 67. §.); so müssen gewisse von $\Delta\varphi$ unabhängige Coefficienten k, l, m, etc. p, q, r, etc. möglich seyn, wofür ist in (11)

$$MR = \frac{\begin{array}{l}\Delta y \,\mathrm{Cos}\,\varphi + \Delta y(p\Delta\varphi + q\Delta\varphi^2 + r\Delta\varphi^3 + \text{etc.})\\ + \Delta x \,\mathrm{Sin}\,\varphi + \Delta x(k\Delta\varphi + l\Delta\varphi^2 + m\Delta\varphi^3 + \text{etc.})\end{array}}{\frac{d\varphi}{dx}\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}}.$$

13. Man kann aber auch $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3$ + etc. für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten α, β, etc. setzen, wie $\Delta\varphi$ in (11): es müssen also gewisse von Δx unabhängige Coefficienten K, L, M, - - - - K^1, L^1, M^1, möglich seyn, für welche die Ausdrücke mR, MR in (11, 12) sich in folgende verwandeln ließen.

mR

$$mR = \frac{\left(\frac{dy\,Cos\varphi}{dx} + Sin\varphi\right)\Delta x + K\Delta x^2 + L\Delta x^3 + etc.}{\frac{d\varphi}{dx}\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + etc.}$$

$$MR = \frac{\left(\frac{dy\,Cos\varphi}{dx} + Sin\varphi\right)\Delta x + K'\Delta x^2 + L'\Delta x^3 + etc.}{\frac{d\varphi}{dx}\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + etc.}$$

Und hieraus erhellet endlich, daß es allemal gewisse von Δx ganz unabhängige Coefficienten A, B, C, - - - A', B', C', etc. geben muß, für welche ist:

$$mR = \frac{dy\,Cos\varphi + dx\,Sin\varphi}{d\varphi} + A\Delta x + B\Delta x^2 + etc.$$

$$MR = \frac{dy\,Cos\varphi + dx\,Sin\varphi}{d\varphi} + A'\Delta x + B\Delta x^2 + etc.$$

Demnach ist gewiß, daß, wenn $\Delta x = Pp$ abnimmt, mR und MR sich dem von Δx unabhängigen Quotienten $\frac{dy\,Cos\varphi + dx\,Sin\varphi}{d\varphi}$ als ihrer Gränze nähern (49. §.): dieser Quotient soll daher der dem Puncte M zugehörige Krümmungshalbmesser seyn (4), nämlich, wenn man ihn r nennt:

$$r = \frac{dy\,Cos\varphi + dx\,Sin\varphi}{d\varphi}\,.$$

14. Es war aber Tang $\varphi = \frac{dx}{dy}$ (134. §.): also ist nach (I. Band. 154. §.).

$$Sin\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(dy^2 + dx^2)}};\quad Cos\varphi = \frac{dy}{\sqrt{(dy^2 + dx^2)}};$$

 und

und $d\varphi = \frac{d.\frac{dx}{dy}}{1+\frac{dx^2}{dy^2}}$ (II. Band. 22. §. 9. Zus.),

mithin $d\varphi = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{dy^2 + dx^2}$.

Für diese Werthe von Sin φ, Cos φ, $d\varphi$ erhält man daher aus (13) den Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{(dy^2+dx^2)(dy^2+dx^2)}{(dyd^2x - dxd^2y)\sqrt{(dy^2dx^2)}},$$

$$\text{oder } r = \frac{(dy^2+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x - dx\,d^2y}.$$

15. Aber gewöhnlichst wird die Abscisse x als eine absolute veränderliche Größe, und y als eine Function von ihr betrachtet, wie dieses wirklich in (1) geschah: bey dieser Voraussetzung ist $dx = 1$, und $d^2x = d.dx = 0$ (55. 53. §.). Demnach der Krümmungshalbmesser (14)

$$r = \frac{(dy^2+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y} = \frac{(dy^2+1)^{\frac{3}{2}}}{-d^2y}.$$

16. Wollte man die Ordinate y als eine absolute veränderliche Größe, und die Abscisse x als eine Function von ihr betrachten (40. §.), so wäre $dy = 1$, und $d^2y = d.dy = 0$ (55. 53. §.): also der Krümmungshalbmesser (14)

$$r = \frac{(dy^2+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x} = \frac{(1+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2x}.$$

17. Die Formul (16. §.) folgt aus (14) wegen (75. §.), ob gleich wir in (1) x als eine absolute veränderliche Größe, und y

als

als eine Function von ihr betrachtet haben, worauf die Erfindung der Formul (14) beruhete, die aber bey dieser Voraussetzung in (15) übergehet.

142. §.

1. Zusatz. Ist OMS die Parabel, und ZX ihre Axe; so ist $y=\sqrt{px}$ (II. Band. 95. §.); also

$$dy=\frac{p^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}};\ d^2y=-\frac{p^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$

Der Krümmungshalbmesser für jede Stelle M der Parabel ist demnach (141. §. n. 15.)

$$r=\left(\frac{p}{4x}+1\right)^{\frac{3}{2}}:\frac{p^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}}=\frac{(p+4x)^{\frac{3}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man $x=PC=PT=0$; so ist $r=\frac{p^{\frac{3}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}p$ der Krümmungshalbmesser für den Scheitel T, wie in (140. §. n. VI.).

143. §.

2. Zusatz. Ist hingegen OMS die Ellipse oder Hyperbel; so ist nach (II. Band. 99 §. Zusatz.)

$$y=\sqrt{\left(px\mp\frac{px^2}{a}\right)}:\ \text{also}$$

$$dy=\frac{ap\mp 2px}{2a\sqrt{\left(px\mp\frac{px^2}{a}\right)}};\ dy^2=\frac{a^2p^2\mp 4ap^2x+4p^2x^2}{4a^2\left(px\mp\frac{px^2}{a}\right)};$$

$$\text{und } d^2y=\frac{-p^2}{4\left(px\mp\frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das obere Zeichen (—) gilt für die Ellipse, und das untere für die Hyperbel: für beyde ist also der Krümmungshalbmesser nach (141. §. n. 15.)

$$r = \left(\frac{a^2p^2 \mp 4ap^2x + 4p^2x^2}{4a^2\left(px \mp \frac{px^2}{a}\right)} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} : \frac{p^2}{4\left(px \mp \frac{px^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

daher $r = \frac{1}{2p^2}\left(p^2 + \frac{4p}{a}\left(\frac{p}{a} \mp 1\right)x^2 + 4p\left(1 \mp \frac{p}{a}\right)x \right)^{\frac{3}{2}}.$

Setzt man $x = PC = PT = 0$; so findet man $r = \frac{1}{2}p$ zum Krümmungshalbmesser für den Scheitel T der Ellipse und Hyperbel, wie in (140. §. n. VI.).

Aus diesen Beyspielen läßt sich leicht abnehmen, worauf alles bey der Anwendung der allgemeinen Formuln (141. §.) auf andere krumme Linien ankömmt.

144. §.

1. Fig. **Aufgabe.** Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $CP = x$, $MP = y$ einer krummen Linie OMS ist gegeben; man soll den Bogen $AM = \mu$ finden, folglich die krumme Linie OMS rectificiren.

Auflösung. 1. Man betrachte den Bogen $AM = \mu$ und die Ordinate $MP = y$ als zwo Functionen von der Abscisse $CP = x$ als einer absoluten veränderlichen Größe (40. §.), welche, wenn $CP = x$ um die Differenz $Pp = \Delta x$ zunimmt, in $\mu' = Am$ und $y' = mQ$ übergehn, mithin um $\mu' - \mu = Mm = \Delta\mu$ und $y' - y = mq = \Delta y$ sich ändern mögen, wobey Mq zu UV parallel ist.

2. Wird

2. Wird nun an M die Tangente BM gezogen, welche von Qm in p mag geschnitten werden; so wird der Bogen $\Delta\mu = Mm$ allemal größer seyn, als seine Sehne $= \surd(Mq^2 + mq^2)$, und zugleich allemal kleiner als $Mp + pm$, wie immer auch $PQ = \Delta x$ abnehmen mag (47. §.): für jede wie immer kleine Differenz Δx ist also:

$$\Delta\mu > \surd(mq^2 + Mq^2), \text{ und } \Delta\mu < Mp + pm.$$

3. Nun war $mq = \Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \alpha\Delta x^2 + \beta\Delta x^3 + \text{etc.}$ in der Bedeutung (59. §.), und $Mq = \Delta x$: es müssen also andere von Δx unabhängige Coefficienten k, l, m, etc. möglich seyn, wofür wäre $mq^2 = \Delta y^2 = \frac{dy^2}{dx^2}\Delta x^2 + k\Delta x^3 + l\Delta x^4 + \text{etc.}$ und $mq^2 + Mq^2 = \Delta y^2 + \Delta x^2 = \left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)\Delta x^2 + k\Delta x^3 + l\Delta x^4 + \text{etc.}$ Demnach muß es auch solche von Δx unabhängige Coefficienten P, Q, R, etc. geben, wofür wäre: $\surd(mq^2 + Mq^2) = \surd(\Delta y^2 + \Delta x^2) = \left(\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)\Delta x^2 + k\Delta x^3 + l\Delta x^4 + \text{etc.}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}\Delta x + P\Delta x^2 + Q\Delta x^3 + R\Delta x^4 + \text{etc.}$

4. Ferner ist $Mp : Mq = BM : BP$, daher

$$Mp = \frac{MB \cdot Mq}{BP} = \frac{\Delta x \surd(dy^2 + dx^2)}{dx}$$

$$= \Delta x \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} \text{ nach (134. §.).}$$

5. Und es ist $pq : Mq = MP : BP$; daher

$$pq = \frac{MP \cdot Mq}{BP} = \frac{dy}{dx}\Delta x \text{ (134. §.)}:$$

also wegen (3) ist

$$pm = pq - mq = \frac{dy}{dx}\Delta x - \Delta y = -\alpha\Delta x^2 - \beta\Delta x^2 - \text{etc.}$$

6. Aus (2) 3) 4) 5) erhält man für jede wie immer kleine Differenz Δx.

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} + P\Delta x + Q\Delta x^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} - \alpha\Delta x - \beta\Delta x^2 - \text{etc.}$$

Der Exponent des Differentialverhältnisses des Bogens $\mu = AM$ als einer Function von der Abscisse x ist also nach (69. §.)

$$d\mu = dx\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}.$$

Einige Anwendungen hievon findet man im zweyten Bande (112. 114. 125. §. 5. Zus.).

145. §.

1. Zusatz. Die dem Puncte M einer krummen Linie OMS zugehörige Tangente MB, und Normallinie MN hängen dergestalt mit dem Bogen $\mu = AM$ zusammen, daß, wenn man mit T die Tangente, und mit N die Normallinie zeichnet, nach (144. 134. §.) allemal ist:

$d\mu$

$$d\mu = \frac{T dy}{y} = \frac{N dx}{y};$$

$$T = \frac{y d\mu}{dy}; \quad N = \frac{y d\mu}{dx}.$$

146. §.

2. Zusatz. Für den Exponenten $d\mu$ des Differentialverhältnisses des Bogens $\mu = AM$ als einer Function von der Abscisse x ist der dem Puncte M zugehörige Krümmungshalbmesser nach (144. 141. §. n. 14.)

$$r = \frac{d\mu^3}{dy d^2x - dx d^2y} = \frac{N^3 dx^3}{y^3(dy d^2x - dx d^2y)} \text{ (145. §.).}$$

Da aber gewöhnlich, wie auch hier ist vorausgesetzt worden, x als eine absolute veränderliche Größe betrachtet wird, wofür $dx = 1$, $d^2x = 0$ seyn muß; so ist in diesem Fall:

$$r = \frac{d\mu^3}{-dx d^2y} = \frac{N^3 dx^3}{-y^3 dx d^2y},$$

$$\text{oder } r = -\frac{d\mu^3}{d^2y} = -\frac{N^3}{y^3 d^2y}.$$

Werden aber der Bogen μ und die Abscisse x als zwo Functionen von der Ordinate y als einer absoluten veränderlichen Größe betrachtet; so ist nun $dy = 1$, $d^2y = 0$, daher

$$r = \frac{d\mu^3}{dy d^2x} = \frac{N^3 dx^3}{y^3 dy d^2x},$$

$$\text{oder } r = \frac{d\mu^3}{d^2x} = \frac{N^3 dx^3}{y^3 d^2x}$$

147. §.

1. Fig. **Aufgabe.** Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $CP=x$, $MP=y$ einer krummen Linie OMS ist gegeben; man soll den Flächen-Raum $ACPM=R$ finden.

Auflösung. Die Ordinate $y=MP$, und den Raum $R=ACPM$ kann man als zwo Functionen von der Abscisse $CP=x$ als einer absoluten veränderlichen Größe ansehen (40. §.), welche, wenn $CP=x$ um eine Differenz $PQ=\Delta x$ wächst, in $y'=mQ$, und $ACQm=R'$ übergehen, mithin sich um $mQ-MP=y'-y=mq=\Delta y$, und $ACQm-ACPM=R'-R=MPQm=\Delta R$ ändern mögen. Nun aber ist, wenn man PM in r verlängert, und mr parallel zu Uv zieht, allemal

$$MPQm > MPQq \text{ und } MPQm < rPQm:$$

also für jede wie immer kleine Differenz Δx,

$$\Delta R > y\Delta x \text{ und } \Delta R < (y+\Delta y)\,\Delta x.$$

Da es aber von Δx unabhängige Coefficienten α, β, γ, u. s. f. geben soll, für welche ist $\Delta y=\frac{dy}{dx}\Delta x+\alpha\Delta x^2+\beta\Delta x^3+\gamma\Delta x^4+\text{etc.}$ (59. §.); so ist auch allemal

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} > y \text{ und } \frac{\Delta R}{dx} < y+\frac{dy}{dx}\Delta x+\alpha\Delta x^2+\text{etc.}$$

Der Exponent des Differentialverhältnisses des Flächenraums $ACPM=R$ als einer Function von x muß also seyn nach (69. §.) $dR=ydx$.

Beyspiele, welche den Gebrauch dieser Formul erläutern sollen, sehe man im zweyten Bande (116. §. 1. 2. — 14. Zus.)

148. §.

Aufgabe. Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $\alpha a = x$, $Pa = y$ einer krummen Linie BPC ist gegeben; man soll den körperlichen Inhalt des runden Körpers PBp finden, welcher durch die Umdrehung der Linie BP um die Abscissenlinie BE entstehen mag. 4. Fig.

Auflösung. 1. Man betrachte die Ordinate $Pa = y$ und den Körper $PBp = K$ als zwo Functionen von der Abscisse $\alpha a = x$ als einer absoluten veränderlichen Größe, welche, wenn $\alpha a = x$ um $ab = \Delta x$ wächst, in $rb = y^1$ und $rBs = K^1$ übergehen, mithin um $rR = \Delta y$ und $Ppsr = \Delta K$ zunehmen mögen, vorausgesetzt, daß rb zu Pa, und PR zu BE parallel ist, Pp, rs aber zweene kreisförmige, auf BE parallele Ebenen sind, welche durch die Umdrehung der Ordinaten Pa, rb, als ihrer Halbmesser, um BE erzeugt werden.

2. Da nun, wie jeder Theil eines Ganzen kleiner als das Ganze selbst, und jedes Ganze größer als ein Theil davon ist, auch Ppsr kleiner seyn muß, als der Cylinder, der den Kreis rs zur Grundfläche und ab zur Höhe hat, und Ppsr größer als der Cylinder, dessen Grundfläche der Kreis Pp, die Höhe aber ab ist; so hat man für jede wie immer kleine Differenz $ab = \Delta x$.

$$Ppsr > Pp . ab \text{ und } Ppsr < rs . ab;$$

daher auch

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} > Pp \text{ und } \frac{\Delta K}{\Delta x} < rs.$$

3. Das

3. Das Verhältniß des Halbmessers zur halben Peripherie sey $1 : \pi$; so ist $y \pi$ die halbe Peripherie des Kreises Pp, und sein Flächeninhalt ist $Pp = \pi y^2$: ferner ist $(y + \Delta y)\pi$ die halbe Peripherie des Kreises rs, und sein Flächeninhalt $rs = \pi (y + \Delta y)^2$. Demnach ist auch

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} > \pi y^2; \quad \frac{\Delta K}{\Delta x} < \pi (y + \Delta y)^2.$$

4. Da man aber $\Delta y = \alpha \Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^4 + \text{etc.}$ für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. setzen kann (59. §.); so müssen andere von Δx unabhängige Coefficienten k, l, m, etc. möglich seyn, für welche ist $(y + \Delta y)^2 = y^2 + k\Delta x + l\Delta x^2 + m\Delta x^3 + \text{etc.}$ also:

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} > \pi y^2; \quad \frac{\Delta K}{\Delta x} < \pi y^2 + \pi (k\Delta x + l\Delta x^2 + \text{etc.})$$

5. Der Exponent des Differentialverhältnisses von $K = PBp$ als einer Function von x ist daher nach (69. §.) $dK = \pi y^2 = \pi y^2 dx$.

Einige Beyspiele, den Gebrauch dieser Formul betreffend, findet man im zweyten Bande (117. §. 1. 2 — 9. Zus.).

149. §.

4. Fig. **Aufgabe.** Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $\alpha a = x$, $Pa = y$ einer krummen Linie BC ist gegeben; man soll die runde Oberfläche des Körpers PBp finden, welcher durch die Umdrehung des Dreyecks BPa um Ba entstehen würde.

Auf-

Auflösung. 1. Die runde Oberfläche von PBp sey S; so sind S und $y=Pa$ zwo Functionen von der Abscisse $\alpha a=x$ als einer absoluten veränderlichen Größe.

2. Sey an P die Tangente AF gezogen, und die Abscisse $\alpha a=x$ wachse um $ab=\Delta x$; so übergeht dafür die Ordinate $Pa=y$ in $rb=y^{I}$, und der Bogen $BP=\mu$ übergeht in $Br=\mu^{I}$, die runde Oberfläche S von PBp übergehet in die runde Oberfläche S^{I} von rBs, welche durch die Umdrehung des Bogens Br um Bb entstehen würde: die Ordinate wächst daher um $\Delta y=rR$, der Bogen BP um $\Delta\mu=Pr$, und die runde Oberfläche S um die runde Oberfläche ΔS von Prsp.

3. Zieht man die Sehnen Por, pos; so kann man sich einen abgestutzten Kegel Porsop zwischen den Kreisen Pp, rs denken, dessen runde Oberfläche kleiner ist, als die runde Oberfläche ΔS des Körpers Prsp, welche der Bogen Pr während der Umdrehung um ab erzeugt.

4. Und wenn die Ordinate br verlängert die Tangente in Q trifft; so erzeugt PQ während der Umdrehung um ab die runde Oberfläche des abgestutzten Kegels PQqp, und Qr erzeugt einen kreisförmigen Ring, dessen beyde Halbmesser rb und Qb sind: die runde Oberfläche ΔS des vom Bogen Pr erzeugten Körpers Ppsr ist aber kleiner als die Summe der runden Oberfläche des abgestutzten Kegels PQqp, und der Fläche des von Qr erzeugten Ringes.

5. Die runde Oberfläche des abgestutzten Kegels Porsop, welche die Sehne Por erzeugen soll (3) ist nun $\pi(2y+\Delta y)Por$ für das Verhältniß $1:\pi$ des Halbmessers zur halben Peripherie, oder $\pi(2y+\Delta y)\sqrt{(\Delta y^2+\Delta x^2)}$.

6. Die

6. Die runde Oberfläche des abgestutzten Kegels PQqp, welche PQ erzeugt (4) ist $\pi(2y+\Delta y+rQ)PQ$; und die Fläche des von Qr erzeugten Ringes (4) ist $\pi(2y+2\Delta y+Qr)Qr$.

7. Aus (3) 4) 5) 6) erhält man demnach für jede wie immer kleine Differenz Δx

$$\Delta S > \pi(2y+\Delta y)\sqrt{(\Delta y^2+\Delta x^2)}.$$
$$\Delta S < \pi(2y+\Delta y+rQ)PQ+\pi(2y+2\Delta y+Qr)Qr.$$

8. Nun ist, wie Mp und pm in (144. §. n. 4. 5.),

$$PQ=\Delta x\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)},$$ und $$Qr=-\alpha\Delta x^2-p\Delta x^3-\text{etc.};$$

ferner $$\sqrt{(\Delta y^2+\Delta x^2)}=\Delta x\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}+P\Delta x^2+Q\Delta x^3+\text{etc.}$$

wie in (144. §. n. 3.), für $\Delta y=\frac{dy}{dx}\Delta x+\alpha\Delta x^2+\beta\Delta x^3$ $+\text{etc.}$

9. Aus (8) 7) erhellet demnach, daß gewisse von Δx unabhängige Coefficienten K, L, M, - - - - *k*, *l*, *m*, etc. möglich seyn müssen, für welche ist:

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} > 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}+k\Delta x+l\Delta x^2+\text{etc.}$$
$$\frac{\Delta S}{\Delta x} < 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}+K\Delta x+L\Delta x^2+\text{etc.}$$

Der Exponent des Differentialverhältnisses der runden Oberfläche S = PBp als einer Function von der Abscisse $\alpha a=x$ ist daher nach (69. §.)

$$dS=2\pi y dx\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}=2\pi y\sqrt{(dy^2+dx^2)}.$$

Bey.

Beyspiele, welche den Gebrauch dieser Formul erläutern, sehe man im zweyten Bande (120. §. 1. 2 — 11. Zusatz).

150. §.

Zusatz. Die Quadratur der runden Oberfläche $S = PBp$ ist mit der Rectification des Bogens $BP = \mu$ dergestalt verbunden, daß $dS = 2\pi y d\mu$ seyn muß (149. 144. §.).

151. §.

Aufgabe. Wenn man was immer für eine, auf rechtwinklichte Coordinaten $CP = x$, $MP = y$ eingeschränkte Formul hat, welche außer x, y, auch dx, dy enthalten mag, dieselbe in eine gleichgültige für die schiefwinklichten Coordinaten $CT = u$, $MT = z$ zu verwandeln, wenn der Coordinatenwinkel $MTC = \varphi$ gegeben ist. 1. Fig.

Auflösung. Die Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten $x = CP$, $y = MP$ einer krummen Linie OMS übergehet in die Gleichung zwischen ihren schiefwinklichten Coordinaten $CT = u$, $MT = z$ für jeden Coordinaten-Winkel $MTC = \varphi$, wenn man bey ihr nach (II. Band. 93. §.)

$$y = z \operatorname{Sin} \varphi; \quad x = u - z \operatorname{Cos} \varphi$$

setzt; wenn man also irgend eine Formul hat, worinn die rechtwinklichten Coordinaten x, y vorkommen; so wird man jene Werthe bey ihr statt y, x nehmen müssen, um sie in eine gleichgültige zu verwandeln.

Es kann aber die gegebene Formul auch dx, dy enthalten; und statt dieser Exponenten wird man folgende nehmen müssen.

$$dy = dz \, Sin \, \varphi; \; dx = du - dz \, Cos \, \varphi.$$

152. §.

1. Zusatz. Die Tangente MB, Normallinie MN, und die Lage beyder Linien gegen die Abscissenlinie UV bleibt dieselbe, man mag sie mit den rechtwinklichten Coordinaten CP = x, MP = y, oder mit den schiefwinklichten CT = u, MT = z vergleichen: man findet sie also unmittelbar aus (134. 151. §.), nämlich:

$$BM = \frac{z}{dz} \sqrt{(dz^2 + du^2 - 2 dz du \, Cos \, \varphi)}.$$

$$MN = \frac{z \, Sin \, \varphi \sqrt{(dz^2 + du^2 - 2 dz du \, Cos \, \varphi}}{du - dz \, Cos \, \varphi}.$$

$$Tang \, MBT = \frac{dz \, Sin \, \varphi}{du - dz \, Cos \, \varphi}.$$

$$Tang \, MNT = \frac{du - dz \, Cos \, \varphi}{dz \, Sin \, \varphi}.$$

153. §.

2. Zusatz. Aber die der schiefwinklichten Ordinate MT = z zugehörige Subtangente ist BT = BP + PT = BP + z Cos φ, und die Subnormallinie TN = PN − z Cos φ: wenn man also BP, BN nach (134. 151. §.) suchet; so findet man:

$$BT = \frac{z du}{dz}.$$

$$TN = \frac{z (dz - du \, Cos \, \varphi)}{du - dz \, Cos \, \varphi}.$$

154. §.

3. Zusatz. Für die Lage der Tangente MB und Normallinie MN gegen die schiefwinklichte Ordinate MT = z wäre nach (I. Band. 155. §. 4. Zusatz) $\text{Tang. } BMT = \frac{BT \sin\varphi}{z - BT \cos\varphi}$, und $\text{Tang. } TMN = \text{Cot. } BMT = \frac{1}{\text{Tang. } BMT}$: also nach (153. §.)

$$\text{Tang. } BMT = \frac{du \sin\varphi}{dz - du \cos\varphi},$$

$$\text{Tang. } NMT = \frac{dz - du \cos\varphi}{du \sin\varphi}.$$

155. §.

4. Zusatz. Der Bogen $AM = \mu$, mit den schiefwinklichten Coordinaten $CT = u$, $MT = z$ verglichen, giebt nach (144. 151. §.)

$$d\mu = \sqrt{(dz^2 + du^2 - 2dz\,du \cos\varphi)}.$$

156. §.

5. Zusatz. Beym unmittelbaren Gebrauch der vorhergehenden Formuln (152. 153. 154. 155. §.) wird demnach vorausgesetzt, daß die Gleichung zwischen den schiefwinklichten Coordinaten $CT = u$, $MT = z$ einer krummen Linie OMS bekannt ist.

157. §.

Aufgabe. Eine auf die rechtwinklichten Coordinaten $CP = x$, $MP = y$ eingeschränkte Formul in eine gleichgültige zu verwandeln, worinn statt jener 5. Fig.

Coordinaten die aus einem bestimmten Puncte X der Abscissenlinie UV ausgehenden Ordinaten $MX = z$, und der veränderliche Winkel $MXC = \varphi$, vorkommen sollen.

Auflösung. 1. Vermöge der Voraussetzung liegt der Punct X in einer bestimmten Entfernung $CX = a$ vom Anfangspuncte C der Abscissen $CP = X$.

2. Setzt man $PX = u$; so ist $x = a - u$, und $y = z \operatorname{Sin} \varphi$: da also $u = z \operatorname{Cos} \varphi$ seyn muß; so hat man:

$$y = z \operatorname{Sin} \varphi;\ x = a - z \operatorname{Cos} \varphi.$$

Für diese Werthe von y und x wird demnach die gegebene Formul in gleichgültige verwandelt werden, die nun, statt x, y, den Winkel φ und die Ordinate z enthalten wird.

3. Wenn aber die zu verwandelnde Formul auch dx, dy enthält; so muß man dafür folgende mit (2) verbundene Werthe nehmen.

$$dy = z d \operatorname{Sin} \varphi + dz \operatorname{Sin} \varphi;$$
$$dx = - z d \operatorname{Cos} \varphi - dz \operatorname{Cos} \varphi:$$

also nach (77. §.)

$$dy = z d\varphi \operatorname{Cos} \varphi + dz \operatorname{Sin} \varphi.$$
$$dx = z d\varphi \operatorname{Sin} \varphi - dz \operatorname{Cos} \varphi.$$

158. §.

1. Zusatz. Für den Bogen $AM = \mu$, die Tangente MB, Normallinie MN, und die Lage dieser beyden Linien gegen die Abscissenlinie UV erhält man nach (134. 144. 157. §.)

$d\mu$

$$d\mu = \sqrt{(dz^2 + z^2 d\varphi^2)}$$

$$MB = \frac{z\sqrt{(dz^2 + z^2 d\varphi^2)}}{zd\varphi \operatorname{Cot} \varphi + dz}.$$

$$MN = \frac{z\sqrt{(dz^2 + z^2 d\varphi^2)}}{zd\varphi - dz \operatorname{Cot.} \varphi}.$$

$$\operatorname{Tang.} MBX = \frac{zd\varphi + dz \operatorname{Tang.} \varphi}{zd\varphi \operatorname{Tang} \varphi - dz}.$$

$$\operatorname{Tang.} MNB = \frac{zd\varphi \operatorname{Tang} \varphi - dz}{zd\varphi + dz \operatorname{Tang} \varphi}.$$

159. §.

2. Zusatz. Die Lage der Tangente MB gegen die Ordinate MX = z zu finden, nehme man Tang XMP $= \frac{PX}{MP} = \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi}$ (157. §.); und Tang BMP $= \frac{dx}{dy}$ (134. §.): also Tang BMX $= \left(\frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi} + \frac{dx}{dy}\right) : \left(1 - \frac{dx \operatorname{Cos}\varphi}{dy \operatorname{Sin}\varphi}\right)$ nach (II. Band. 156. §. 1. Zus. XV. Form.). Demnach nach (157. §.)

$$\operatorname{Tang} BMX = \frac{zd\varphi}{dz}.$$

160. §.

3. Zusatz. Für die Lage der Normallinie NM gegen die Ordinate MX = z hat man Tang NMX = Tang (PMX — PMN); daher, wegen Tang PMX = Cot PXM $= \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi}$, und Tang PMN $= \frac{dy}{dx}$ (134. §.), ist nach (I. Band. 156. §. 1. Zus. XV. Form.)

$$\text{Tang NMX} = \frac{dx \,\text{Cos}\,\varphi - dy \,\text{Sin}\,\varphi}{dx \,\text{Sin}\,\varphi + dy \,\text{Cos}\,\varphi}.$$

Also ist nach (157. §.)

$$\text{Tang NMX} = -\frac{dz}{z d\varphi}.$$

161. §.

4. Zusatz. Bey solchen Ordinaten MX = z muß man an X eine senkrechte Linie nb auf MX setzen, welche die Tangente BM in b, und die Normallinie MN in n schneiden mag, wenn man die Subtangente, und Subnormallinie haben will, wie sie hier gewöhnlich betrachtet wird: es ist nämlich Xb die Subtangente, und Xn die Subnormallinie. Weil also Xb = MX . Tang bMX = z Tang BMX, und Xn = MX . Tang NMX ist; so erhält man die Subtangente, und Subnormallinie nach (159. 160. §.), wie folgt.

$$Xb = \frac{z^2 d\varphi}{dz};\quad Xn = -\frac{dz}{d\varphi}.$$

162. §.

Nun wollen wir auch diejenigen Grundformuln aufsuchen, auf welchen alle Anwendungen der Differentialverhältnisse auf die höhere Mechanik beruhen. Bey den vorhergehenden Untersuchungen habe ich nichts vorausgesetzt, was nicht entweder in dieser Beylage, oder in dem Unterrichte, zu welchem sie gehört, ist bewiesen worden. Hingegen setze ich nun voraus, daß die Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte am Hebel, vom Schwerpuncte, und von der Zusammensetzung der Kräfte meinen Lesern bekannt ist. Von

der Bewegung selbst werde ich nichts annehmen, ohne es zu beweisen: ich will mich vielmehr bemühen, alles, was wirklich brauchbar, allgemein, und vorzüglich bey einer vollkommenen Abhandlung der Maschinenlehre unentbehrlich ist, zwar kurz, doch deutlich und gründlich auseinander zu setzen.

163. §.

Erklärung. Ein Körper bewegt sich, oder ruhet, nachdem er seinen Ort ändert, oder nicht. Es hängt aber die Bewegung jedes Körpers von den Bewegungen aller Puncte, die bey ihm gedacht werden können, dergestalt ab, daß, um jene gehörig zu bestimmen, man im Stande seyn muß, diese einzelnen Bewegungen zu beurtheilen. Aus dieser Ursache, und weil bisweilen, wie wir sehen werden, die Bewegung eines einzigen Puncts zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Körpers hinreicht, pflegt man die Lehre von der Bewegung einzelner Punkte der von der Bewegung der Körper zum Grunde zu legen.

164. §.

Erklärung. Die Bewegung eines Puncts ist aber geradlinicht oder krummlinicht, nachdem er sich in einer geraden oder krummen Linie fortbewegt. Bey geradlinichter Bewegung wird ihre **Richtung** durch die gerade Linie selbst bestimmt, in welcher der Punct fortgeht: bey der krummlinichten Bewegung aber wird ihre Richtung alle Augenblicke geändert: in jedem Augenblicke kömmt sie mit der Tangente überein, welche demjenigen Puncte der krummen Linie zugehört, an dem sich der bewegliche Punct in demselben Augenblicke befindet.

165. §.

Erklärung. Bey der Beurtheilung der Bewegung eines Puncts kömmt alles darauf an, daß man die Dauerzeit, den Weg oder Raum, welchen der Punct binnen derselben Zeit zurücklegt, und die Geschwindigkeit zu bestimmen im Stande sey, mit welcher er sich in jedem Augenblicke bewegt. Ein Punct mag sich in einer geraden oder krummen Linie bewegen (164. §.); so wird er ein Stück davon in einer gewissen Zeit durchlaufen, und dasselbe giebt den eigentlichen Weg oder Raum, den er binnen derselben Zeit zurücklegt. Die Vergleichung des binnen einer Zeit zurückgelegten Raums mit derselben Zeit führt zum Begriffe der Geschwindigkeit: allen Puncten, welche gleiche Räume binnen gleichen Zeiten zurücklegen, werden gleiche Geschwindigkeiten zugeschrieben: wenn aber zweene Puncte ungleiche Räume binnen gleichen Zeiten durchlaufen; so sagt man, ihre Geschwindigkeiten seyen ungleich, und die Geschwindigkeit desjenigen Punkts sey größer, welcher den größern Raum durchläuft. Eben so sagen wir von einem Puncte, er bewege sich mit einerley Geschwindigkeit fort, wenn er in gleichen auf einander folgenden Zeittheilchen gleiche Wege zurücklegt: wenn er aber in gleichen Zeiten ungleiche Räume durchläuft; so sagt man, er bewege sich mit ungleicher Geschwindigkeit, etwa mit wachsender oder abnehmender, nachdem die Räume, welche in den folgenden gleichen Zeittheilchen zurückgelegt werden, immer größer, oder kleiner als diejenigen sind, welche der Punct in den vorhergehenden Zeittheilchen zurücklegt.

166. §.

Erklärung. Die Bewegung eines Puncts heißt unveränderlich oder gleichförmig, wenn er in gleichen, wie immer großen oder kleinen, Zeiten gleiche Räume durchläuft, wenn er demnach mit einerley Geschwindigkeit fortgeht (165. §.): hingegen wird die Bewegung eines Puncts veränderlich genannt, wenn er ungleiche Räume in gleichen Zeiten durchläuft, mithin mit ungleicher Geschwindigkeit fortgeht (165. §.).

167. §.

1. **Zusatz.** Wenn bey einer unveränderlichen Bewegung binnen einer Zeit z der Raum r, und binnen einer andern mmal so großen Zeit Z ein Raum R zurückgelegt wird; so ist auch R mmal so groß als r, nämlich $R = rm$ wegen $Z = zm$ (166. §.).

168. §.

2. **Zusatz.** Ist aber bey einer unveränderlichen Bewegung die Dauerzeit $Z = z\frac{m}{n}$ aus m nteln der Zeit z zusammengesetzt; so muß auch der binnen der Zeit Z zurückgelegte Raum R aus m nteln des binnen der Zeit z zurückgelegten Raumes r zusammengesetzt, oder auch $R = r\frac{m}{n}$ seyn (166. §.).

169. §.

Lehrsatz. Bey jeder gleichförmigen Bewegung verhalten sich die binnen was immer für Zeiten T, t zurückgelegten Räume S, s gegen einander, wie die Zeiten selbst, oder es ist $S : s = T : t$.

Beweis. Die Zeiten T, t sind commensurabel, oder incommensurabel.

1. Wenn T, t commensurabele Zeiten sind; so müssen sie einen gemeinschaftlichen aliquoten Theil haben, dergestalt, daß, für gewisse ganze Zahlen m, n, entweder t ganz, oder ein ntel davon zugleich ein mtel von T ist: dafür muß also $T = tm$, oder $T = t\frac{m}{n}$ seyn. Daher auch, für dieselben Zahlen, $S = sm$, oder $S = s\frac{m}{n}$ (167. 168. §.); mithin $S : s = m : 1$, oder $S : s = \frac{m}{n} : 1$, so wie $T : t = m : 1$, oder $T : t = \frac{m}{n} : 1$. In beyden Fällen ist daher $S : s = T : t$.

2. Sind hingegen die Zeiten T, t incommensurabel; so giebt es keinen aliquoten Theil von t, welcher zugleich ein aliquoter Theil von T wäre, es muß vielmehr für jedes mögliche ntel von t eine ganze Zahl m möglich seyn, wofür

$$T > t\frac{m}{n} \text{ und zugleich } T < t\frac{m+1}{n}$$

seyn würde. Dafür muß aber auch der binnen der Zeit T zurückgelegte Weg S größer seyn, als der Weg $s\frac{m}{n}$, welchen der bewegliche Punct in der Zeit $t\frac{m}{n}$ zurücklegen würde, und zugleich kleiner als der Weg $s\frac{m+1}{n}$, den er in der Zeit $t\frac{m+1}{n}$ durchlaufen würde (166. 168. §.), nämlich auch

S >

$$S > s\frac{m}{n} \text{ und zugleich } S < s\frac{m+1}{n}.$$

Daraus erhält man

$$Ts > tS\frac{m}{m+1} \text{ und } Ts < tS\frac{m+1}{m},$$

daher

$$Ts > tS - \frac{tS}{m+1} \text{ und } Ts < tS + \frac{tS}{m}.$$

Es ist aber

$$tS - \frac{tS}{m+1} > tS - \frac{tS}{m}:$$

also ist auch

$$Ts > tS - \frac{tS}{m} \text{ und } Ts < tS + \frac{tS}{m}.$$

Dieses soll, vermöge des Vorhergehenden für jede wie immer große Zahl n, und damit auch für jede wie immer große Zahl m gelten: da also gewiß eine ganze Zahl m möglich ist, wofür ein mtel von tS, nämlich $\frac{tS}{m}$ kleiner seyn würde, als eine wie immer kleine denkbare gleichartige Größe; so ist gewiß $Ts = tS$ (8. §.), daher $S : s = T : t$.

170. §.

Zusatz. Wenn demnach irgend ein Raum s bekannt ist, welchen ein Punct, der sich gleichförmig fortbewegt, binnen einer bestimmten Zeit t durchlaufen mag; so kann man leicht den Raum S bestimmen, den er in jeder andern Zeit T durchlaufen würde, und eben dadurch erhält man einen bestimmten Begriff von seiner Geschwindigkeit (165. §.) Aus diesem Grunde pflegt man die unveränderliche Geschwin-

schwindigkeit bey der gleichförmigen Bewegung durch den Weg zu schätzen, welcher in einer Secunde zurückgelegt wird: wenn demnach C die Geschwindigkeit bedeutet, und S den binnen jeder andern Zeit T zurückgelegten Weg; so ist S:C=T:1″, daher $S=C.\frac{T}{1''}$, wobey $\frac{T}{1''}$ den Exponenten des Verhältnisses der Zeit T gegen eine Secunde ausdrückt. Man kann aber 1″ weglassen, und denselben Exponenten sich bey T denken, wodurch man folgende Grundformuln zur Beurtheilung jeder gleichförmigen Bewegung erhält:

$$S=CT;\ C=\frac{S}{T};\ T=\frac{S}{C}.$$

171. §.

Lehrsatz. Bey jeder veränderlichen Bewegung kann man den binnen einer Zeit T zurückgelegten Weg S, und die Geschwindigkeit C, welche der bewegliche Punct am Ende der Zeit T haben mag, als zwo Functionen von T als einer absoluten veränderlichen Größe betrachten, wofür ist dS = C = CdT.

Beweis. Daß man die Dauerzeit T bey einer veränderlichen Bewegung als eine absolute veränderliche Größe betrachten kann, erhellet aus (40. §.): da aber der Raum S, welchen ein Punct binnen einer Zeit T zurücklegen, und die Geschwindigkeit C, die er am Ende derselben Zeit haben soll, von der Zeit T abhängt (166. §.); so erhellet daraus auch, daß sowohl S, als C als eine Function von T kann betrachtet werden.

1. Man

1. Man nehme demnach an, der Punct, welcher den Weg S binnen der Zeit T bereits zurückgelegt, und die Geschwindigkeit C erlangt hat, setze seine Bewegung um ein Zeittheilchen ΔT fort, dergestalt, daß nun $T+\Delta T$ die Dauerzeit seiner Bewegung sey; so muß er binnen der Zeit ΔT ein neues Stück ΔS seiner Bahn durchlaufen, so daß $S+\Delta S$ der gesammte, binnen der Zeit $T+\Delta T$ zurückgelegte Weg sey: seine am Ende der Zeit T erlangte Geschwindigkeit C wird sich in dem darauf folgenden Zeittheilchen ΔT um ein Stück ΔC ändern, etwa zu- oder abnehmen, dergestalt, daß der bewegliche Punct am Ende der Zeit $T+\Delta T$ eine Geschwindigkeit $C+\Delta C$ oder $C-\Delta C$ haben mag (166. §.).

2. Behielte der Punct in der ganzen Zeit ΔT die Geschwindigkeit C; so würde er binnen derselben Zeit den Raum $C\Delta T$ durchlaufen (166. 170. §.: da also seine Geschwindigkeit während der ganzen Zeit ΔT zu- oder abnimmt (1), da demnach derselbe Punct in der Zeit ΔT einen größeren oder kleineren Raum ΔS (1) zurücklegt, als er zurücklegen würde, wenn er mit unveränderter Geschwindigkeit C fortgienge (165. §.); so ist eigentlich:

$$\Delta S > C\Delta T \text{ oder } \Delta S < C\Delta T.$$

3. Hätte der bewegliche Punct die Geschwindigkeit $C+\Delta C$ oder $C-\Delta C$ binnen der ganzen Zeit ΔT; so müßte er binnen dieser Zeit den Weg $(C+\Delta C)\Delta T$, oder $(C-\Delta C)\Delta T$ zurücklegen (166. 170. §); da also seine am Ende der Zeit T erlangte Geschwindigkeit C in der darauf folgenden Zeit ΔT allmählich zu- oder abnahm, bis

sie erst am Ende der Zeit ΔT in $C+\Delta C$ oder $C-\Delta C$ übergieng (1), da demnach der bewegliche Punct einen kleineren oder größeren Weg ΔS binnen der Zeit ΔT zurückgelegt hat, als er zurückgelegt hätte, wenn er in der ganzen Zeit ΔT die unveränderliche Geschwindigkeit $C+\Delta C$ oder $C-\Delta C$ gehabt hätte (165. §.); so ist eigentlich.

$\Delta S < (C+\Delta C)\Delta T$ oder $\Delta S > (C-\Delta C)\Delta V$.

4. Nun soll C eine Function von T seyn: die Differenz davon soll sich demnach, für gewisse von ΔT unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. durch $\Delta C = \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \gamma\Delta T^3 +$ etc. ausdrücken lassen (59. §.). Für jedes wie immer kleines Zeittheilchen ΔT hat man also wegen (2) 3)

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} > C \text{ und } \frac{\Delta S}{\Delta T} < C + \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} < C \text{ und } \frac{\Delta S}{\Delta T} > C - \alpha\Delta T - \beta\Delta T^2 - \text{etc.}$$

Daher ist allemal $dS = CdT$ (69. §.).

172. §.

1. Zusatz. Die Geschwindigkeit C selbst ist als eine Function von T betrachtet worden, T aber soll eine absolute veränderliche Größe (40. §.), daher $dT = 1$ (55. §.) seyn: aus (171. §.) erhalten wir demnach folgende merkwürdige Formuln:

$$\text{I. } dS = CdT = C.$$

$$\text{II. } \frac{dS}{dT} = C.$$

$$\text{III. } d\left(\frac{dS}{dT}\right) = \frac{d^2S}{dT} = dC.$$

173. §.

2. Zusatz. Um aber diese Formuln auf die Beurtheilung einer veränderlichen Bewegung anwenden zu können, muß man im Stande seyn, die Geschwindigkeit C, für jede Zeit T zu schätzen: sie ändert sich mit der Zeit T (166. §.); daher kann man sie nicht, wie die Geschwindigkeit bey einer gleichförmigen Bewegung, durch den in einer Secunde zurückgelegten Weg schätzen (170. §.). Indessen wird sie genugsam bestimmt, wenn man durch sie den Weg verstehet, welchen der bewegliche Punct nach verflossener Zeit T in der zunächst darauf folgenden Secunde durchlaufen würde, wenn am Ende der Zeit T alle Aenderung der Bewegung aufhörte, der Punct demnach mit der binnen der Zeit T erlangten ungeänderten Geschwindigkeit C fortgienge. Kennt man die Function von T, welche C geben soll; so wird man nach der ersten Formul (172. §.) den Raum S bestimmen können, welchen der bewegliche Punct binnen der Zeit T durchläuft, in welcher er die Geschwindigkeit C erlanget. Ist die Function von T bekannt, welche S giebt; so wird man nach der zweyten Formul (172. §.) die Geschwindigkeit C finden können, welche der bewegliche Punct binnen der Zeit T erlangen muß, in welcher er den Raum S durchläuft.

174. §.

Erklärung. Unter allen veränderlichen Bewegungen ist die gleichförmig beschleunigte, und gleichförmig verzögerte am merkwürdigsten. Wenn nämlich die veränderliche Bewegung mit allmählich zu- oder abnehmender Ge-

schwin-

schwindigkeit geschieht; so heißt sie eine beschleunigte, im ersten Fall, oder eine verzögerte Bewegung im zweyten Fall. In dem bestimmten Fall aber, wenn die Geschwindigkeit gerade wie die Zeit bey der beschleunigten Bewegung wächst, und bey der verzögerten abnimmt; so nennt man sie eine gleichförmig beschleunigte, oder gleichförmig verzögerte Bewegung.

175. §.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit k, welche ein Punct bey der gleichförmig beschleunigten Bewegung in der ersten Secunde erlangen mag, ist gegeben; man soll den Weg S finden, welchen er in einer Zeit T zurücklegt.

Auflösung. Wenn C die Geschwindigkeit ist, welche der bewegte Punct binnen der Zeit T erlanget; so ist $1'':T=k:C$ (174. §.), daher $C=kT$, wenn T den Exponenten des Verhältnisses der Zeit, welcher die Geschwindigkeit C zugehören soll, gegen eine Secunde bedeutet. Es ist aber allemal $dS=CdT$ (171. §.): bey der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist also $dS=kTdT$, und das Integral davon $S=\frac{1}{2}kT^2+\text{Const.}$ Da aber der Weg, welcher binnen der Zeit T zurückgelegt wird, gleich Null werden muß, wenn T gleich Null wird; so ist $\text{Const}=0$, und der ganze Weg $S=\frac{1}{2}kT^2$.

176. §.

1. Zusatz. Heißt g der Weg, welchen der bewegte Punct in der ersten Secunde zurücklegt; so ist $g=\frac{1}{2}k$,

und

und $k = 2g$ die in der ersten Secunde erlangte Geschwindigkeit (175. §.).

177. §.

2. Zusatz. Aus (175. 176. §.) findet man folgende Formuln, wornach man jede gleichförmig beschleunigte Bewegung wird vollständig beurtheilen können, sobald der Raum g bekannt ist, welchen der bewegte Punct in der ersten Secunde durchläuft.

$$\text{I. } C = 2gT. \qquad \text{II. } T = \frac{C}{2g}.$$

$$\text{III. } S = gT^2. \qquad \text{IV. } T = \sqrt{\frac{S}{g}}.$$

$$\text{V. } S = \frac{C^2}{4g}. \qquad \text{VI. } C = 2\sqrt{gS}.$$

178. §.

3. Zusatz. Den darüber angestellten Beobachtungen zufolge geschieht der freye Fall schwerer Körper mit gleichförmig beschleunigter Bewegung: zur vollkommenen Beurtheilung derselben dienen also die Formuln in (177. §.), wobey g die Höhe des freyen Falls in der ersten Zeitsecunde, S aber die Höhe des Falls in T Secunden, und C die bey demselben Fall erlangte Geschwindigkeit bedeutet. Dazu ist aber nöthig, daß man die Höhe g kenne: könnte man die Höhe S des freyen Falls in einer Anzahl T von Secunden genau genug beobachten; so würde man daraus $g = \frac{S}{T^2}$ (177. §.) herleiten können. Wir werden unten eine genauere Methode kennen lernen, wornach g sich bestimmen läßt: man findet nach ihr, daß ein schwerer Körper im

leeren Raume in der ersten Secunde durch die Höhe g = 15,625 Rheinl. Fuß fällt, mithin binnen der ersten Secunde die Geschwindigkeit k = 2 g (176. §.) = 31,25 Rheinl. Fuß erlanget.

179. §.

Wir haben bisher die Bewegung einzelner Puncte in Betrachtung gezogen, und diejenigen allgemeinen Formuln angegeben, nach welchen sie beurtheilt werden kann: nun wollen wir auch die Bewegung der Körper in Erwägung ziehen, welche von der Bewegung aller einzelnen Puncte abhängt, die an ihm gedacht werden können. Der einfachste Fall dabey ist, wenn der Körper sich dergestalt bewegt, daß alle seine Puncte in geraden und einander parallelen Linien fortgehen: in diesem Fall, auf welchen auch folgende Untersuchungen eingeschränkt werden sollen, gehen alle Puncte des ganzen Körpers mit einerley Geschwindigkeit fort, und alle legen in einerley Zeit gleiche Wege zurück (165. §.): diese gemeinschaftliche Geschwindigkeit aller Punkte ist die Geschwindigkeit des ganzen Körpers; der Weg, den er in einer bestimmten Zeit durchläuft, ist der Raum, welchen was immer für ein Punct von ihm binnen derselben Zeit durchläuft. Daher kann man in diesem Fall den ganzen Körper als einen Punct betrachten, als wenn seine gesammte Masse in seinem Schwerpuncte beysammen wäre: und alsdann wird man seine Bewegung nach der bisherigen Theorie, als die Bewegung eines Puncts, bestimmen können.

180. §.

180. §.

Da aber jede Bewegung von irgend einer bewegenden Kraft abhängt, durch deren Größe sie vollkommen bestimmt wird: so müssen wir nun auch untersuchen, welchen Einfluß die bewegenden Kräfte in die gesammte Bewegung eines Körpers haben, und wie sich diese durch die Kräfte selbst bestimmen läßt. Eine der bekanntesten Kräfte in der Natur ist die Schwere, und diese nimmt man zum gemeinschaftlichen Maaß aller übrigen Kräfte.

181. §.

Erklärung. Alle Kräfte können in unveränderliche und veränderliche eingetheilt werden. Wenn eine Kraft von dem ersten Augenblicke der Bewegung an, in jedem folgenden Augenblicke gleich stark den Körper, der von ihr bewegt wird, drückt; so heißt sie eine unveränderliche Kraft, wie die Schwere ist: wenn aber eine Kraft den Körper, welcher von ihr bewegt wird, nicht in jedem Augenblicke während der Bewegung gleich stark drückt; so wird sie eine veränderliche Kraft genannt.

182. §.

Erklärung. Alle, sowohl unveränderliche, als veränderliche Kräfte können mit der Schwere, als der bekanntesten unveränderlichen Kraft, verglichen, und, ihrer Größe nach, durch gewisse Gewichte geschätzt werden. Die Größe einer unveränderlichen Kraft bleibt in jedem Augenblicke während der Bewegung dieselbe (181. §.): sie kann einem Gewichte gleichgesetzt werden, von welchem der körliche Punct, worauf jene Kraft wirken mag, eben so stark

 unter-

unterwärts gedruckt werden würde, wenn dasselbe frey an ihm herab hienge, als er von jener Kraft nach der Richtung gedruckt wird, nach welcher sie auf ihn wirkt. Auf diese Art kann auch jede veränderliche Kraft einem Gewichte gleich gesetzt werden, mit dem Unterschiede nur, daß dieses Gewicht in jedem Augenblicke während der Bewegung größer oder kleiner seyn muß, nachdem die Kraft selbst größer oder kleiner geworden ist (181. §.) Hieraus erhellet, wie man sich gleiche und ungleiche bewegende Kräfte vorstellen kann.

183. §.

Lehrsatz. **Wenn zweene Puncte von zwoen unveränderlichen und gleichen Kräften in geraden Linien getrieben werden; so müssen die Räume, welche sie in einer gewissen Zeit zurücklegen mögen, einander gleich seyn.**

Beweis. Ein Punct a werde von der Kraft v, und ein anderer Punct A von der Kraft V getrieben. Da nun die Kräfte v, V unveränderlich sind; so werden die Puncte a, A von ihnen in jedem folgenden Augenblicke während der Bewegung eben so stark, als im ersten Augenblicke, da die Bewegung den Anfang nimmt, gedrückt (181. §.): da also zugleich v, V gleiche Kräfte sind; so muß nothwendig der Punct a von der Kraft v sowohl im ersten, als in jedem folgenden Augenblicke eben so stark gedrückt werden, wie stark der andere Punct A von der Kraft V gedrückt wird (182. §.): die Puncte a, A werden also von den Kräften v, V durch gleiche Räume in gleichen Zeiten fortgeführt werden.

184. §.

Lehrsatz. Die Räume, welche zweene von zwoen unveränderlichen Kräften getriebene Puncte in einer Zeit zurücklegen, verhalten sich gegen einander gerade wie dieselben Kräfte.

Beweis. 1. Wenn ein Punct von mehreren Kräften nach einer geradlinichten Richtung getrieben wird; so muß der Raum, den er in einer gewissen Zeit durchlaufen mag, der Summe derjenigen Räume gleich seyn, die er in derselben Zeit durchlaufen würde, wenn auf ihn jene einzeln genommene Kräfte wirkten.

2. Wenn ferner auf einen Punkt eine Kraft k, und auf einen andern eine rmal größere K in einem gewissen Augenblicke wirkt; so kann man annehmen, daß auf diesen andern Punct in demselben Augenblicke gleiche Kräfte k, k, k, - - - k, r an der Zahl wirken, deren Summe =K ist (182. §.).

3. Wäre daher die auf den Punct A wirkende unveränderliche Kraft rmal so groß, als die auf den Punct a wirkt; so müßte auch der Raum, welchen A in einer gewissen Zeit zurücklegte, rmal so groß seyn, als der Raum, den a in derselben Zeit durchliefe (2) 1), und (183. §.).

4. Bestünde hingegen die auf den Punct A wirkende unveränderliche Kraft P aus m nteln der auf den Punct a wirkenden Kraft p; so müßte auch der Weg Z, welchen A binnen einer Zeit T durchliefe, aus m nteln des Raumes z bestehen, welchen a in derselben Zeit T durchliefe. Denn wenn man sich einen dritten Punct α denkt, welcher von

einer unveränderlichen Kraft, die einem ntel von p gleich seyn mag, getrieben werden soll; so ist mmal, und z nmal so groß, als der Raum, welchen α in der Zeit T durchlaufen würde (3), das heißt: dieser Raum ist ein ntel von z, und Z aus m solchen nteln zusammengesetzt.

5. Nun sey v die auf den Punct a, und V die auf A wirkende unveränderliche Kraft: der Weg, welchen a in der Zeit T zurücklegt, sey s, und der, welchen A in derselben Zeit durchläuft, sey S.

Die Kräfte v, V sind entweder commensurabel, oder incommensurabel. Sind v, V zwo commensurable Kräfte; so muß entweder v ganz, oder irgend ein ntel von v einem mtel von V gleich seyn, das heißt: in diesem Fall giebt es gewiß eine ganze Zahl m, wofür V entweder mmal so groß als v, oder mmal so groß als ein ntel von v ist, n mag was immer für eine andere ganze Zahl seyn. Also hat man bey dieser Voraussetzung, für gewisse ganze Zahlen m, n,

$$V = vn \text{ oder } V = v\frac{m}{n};$$

daher auch nach (3) 4)

$$S = sn \text{ oder } S = s\frac{m}{n}.$$

Folglich muß $\frac{V}{v} = n$ und $\frac{S}{s} = n$, oder $\frac{V}{v} = \frac{m}{n}$, und $\frac{S}{s} = \frac{m}{n}$, mithin $\frac{V}{v} = \frac{S}{s}$, und $S:s = V:v$ seyn.

Seyen ferner V, v incommensurable Kräfte; so giebt es keine Kraft, sie mag wie immer klein gedacht werden, welche

welche ein gemeinschaftlicher aliquoter Theil von V und v wäre, es muß vielmehr für jedes mögliche ntel von v eine ganze Zahl m möglich seyn, für welche

$$\text{I. } V > v\frac{m}{n} \text{ und zugleich } V < v\frac{m+1}{n}$$

seyn würde. Man denke sich nun eine Kraft α, welche der Differenz der Kräfte V und $v\frac{m}{n}$ gleich ist; so wird der Punct A eigentlich von einer Kraft $V = v\frac{m}{n} + \alpha$ getrieben, und muß daher in der Zeit T einen Weg zurücklegen, welcher der Summe derjenigen Räume gleich ist, die er in derselben Zeit zurücklegen würde, wenn er allein von $v\frac{m}{n}$, und allein von α bewegt würde: da er also wegen der Kraft $v\frac{m}{n}$, gewiß den Weg $s\frac{m}{n}$ durchlaufen müßte (4), und wegen der Kraft V den Weg S durchlaufen soll; so ist $S > s\frac{m}{n}$. Aus gleichen Gründen findet man, daß $S < s\frac{m+1}{n}$ seyn muß. Wir haben demnach

$$\text{II. } S > s\frac{m}{n} \text{ und zugleich } S < s\frac{m+1}{n}.$$

Aus I) II) erhält man

$$sV > Sv\frac{m}{m+1} \text{ und } sV < Sv\frac{m+1}{m},$$

oder

$$sV > Sv - \frac{Sv}{m+1} \text{ und } sV < Sv + \frac{Sv}{m}.$$

Es ist aber $Sv - \frac{Sv}{m+1} > Sv - \frac{Sv}{m}$: also ist auch

$$sV > Sv - \frac{Sv}{m} \text{ und } sV < Sv + \frac{Sv}{m}.$$

Nun ist dieses allemal richtig, die Zahl m mag wie immer groß seyn, und es ist allemal eine ganze Zahl m möglich, wofür ein mtel von Sv kleiner seyn würde, als jede wie immer kleine denkbare gleichartige Größe: also ist $sV = Sv$ (8. §.), und nun $S:s = V:v$.

185. §.

Aufgabe. Ein Körper, dessen Masse M heißen mag, wird von einer unveränderlichen Kraft V nach der durch seinen Schwerpunct fortgehenden Richtung getrieben; man soll den Weg S bestimmen, welchen er bloß wegen der Kraft V binnen einer gewissen Zeit T zurücklegen würde.

Auflösung. Es wird nämlich hier vorausgesetzt, daß der Körper ohne alle Schwere ist: freylich ist er wirklich schwer; aber man will nur seine bloß von der Kraft V abhängige Bewegung bestimmen, als wenn er auf einem horizontalen Boden läge, und ihn darauf die Kraft V nach der durch seinen Schwerpunct gehenden, und zu demselben Boden parallelen Richtung triebe.

1. Gesetzt nun, der Körper, dessen Masse M ist, lege in der Zeit T den Weg S zurück, wenn er von der unveränderlichen Kraft V getrieben wird, und seine Schwere in die Bewegung keinen Einfluß hat.

2. Da

2. Da aber derselbe Körper wirklich schwer ist; so kann man sich die Vorstellung machen, er falle vermöge seiner Schwere frey herab, und zwar durch eine Höhe s, in der Zeit T. Die Kraft, welche auf ihn binnen der ganzen Zeit T wirkt, ist sein unveränderliches Gewicht, dem die Masse M proportional ist.

3. Aus (1) 2) wegen (184. §.) erhält man demnach $S:s=V:M$, daher $S=\frac{Vs}{M}$. Es ist aber $s=gT^2$ (178. 177. §.): also muß seyn

$$S=\frac{gV}{M}T^2.$$

186. §.

1. Zusatz. Dieses giebt $dS=\frac{2gV}{M}TdT$, demnach $\frac{dS}{dT}=\frac{2gV}{M}T$. Die Geschwindigkeit C, welche ein Körper von der Masse M binnen der Zeit T erlangen würde, wenn ihn eine unveränderliche Kraft V, nach der durch seinen Schwerpunct fortgehenden Richtung triebe, ist also (172. §.)

$$C=\frac{2gV}{M}T.$$

187. §.

2. Zusatz. Sucht man den Werth von T aus der Formul in (186. §.); so findet man dafür nach (185. §.)

$$S=\frac{MC^2}{4gV}.$$

188. §.

3. Zusatz. Der Werth von g ist bekannt (178. §.): die Bewegung einer gegebenen Masse M, welche von einer gegebenen unveränderlichen Kraft V nach der durch ihren Schwerpunct gehenden Richtung getrieben wird, kann also nach (185. 186. 187. §.) vollkommen bestimmt werden. Es erhellet auch aus (186. 174. §.), daß sie allemal eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ist, indem die Geschwindigkeiten C, c, welche die Masse M in zwoen verschiedenen Zeiten T, t, vom Anfange der Bewegung an gerechnet, erlangen mag, sich, wegen $C = \frac{2gV}{M} T$, $c = \frac{2gVt}{m}$, gerade wie die Zeiten T, t verhalten.

189. §.

Aufgabe. Eine Masse M wird von einer veränderlichen Kraft U, nach der durch ihren Schwerpunct fortgehenden Richtung bewegt, ohne daß die Schwere irgend einen Einfluß in ihre Bewegung hat; man soll die Geschwindigkeit C bestimmen, welche sie in einer Zeit T erlangen würde.

Auflösung. 1. Es bedeutet hier U die Kraft, welche die Masse M in Bewegung setzt, und vom ersten Augenblicke an, sich während der Bewegung beständig ändert, zu- oder abnimmt. Diese Zunahme sowohl als Abnahme kann nach unzählbaren Gesetzen geschehen, wovon keines hier bestimmt wird: daher wird hier eine solche Formul verlangt, welche ganz allgemein angeben soll, wie C von T, U und M bey allen möglichen Gesetzen abhängt, nach welchen die bewe-

bewegende Kraft U sich vom ersten Augenblicke an während der Bewegung ändern kann.

2. Je mehr Zeit vom Anfange der Bewegung an verfließt, desto größer ist die Aenderung, welche die anfängliche Kraft U leidet: wenn wir also annehmen, die Kraft U habe sich binnen einer Zeit T dergestalt geändert, daß sie am Ende derselben Zeit einer Kraft V gleich ist; so kann man sowohl die binnen der Zeit T zu erzeugende Geschwindigkeit C, als die Kraft V als eine Function von T, und T als eine absolute veränderliche Größe betrachten (40. §.).

3. Da nun hier zweene Fälle in Betrachtung müssen gezogen werden, nämlich der Fall einer allmählich zunehmenden, und der einer abnehmenden Kraft; so nehmen wir zuerst an, es sey von einer wachsenden Kraft die Rede. Wenn nach Verlauf der Zeit T, die Masse M fortbewegt wird, und diese Bewegung noch eine Zeit ΔT lang fortdauert; so wächst ihre Geschwindigkeit C binnen der Zeit ΔT um ein Stück ΔC, und die Kraft V wächst um ein Stück ΔV (2): die Masse M wird also im letzten Augenblicke der Zeit T, und im ersten des darauf folgenden Zeittheilchens ΔT von der Kraft V getrieben, welche allmählich wächst, bis sie in $V + \Delta V$ am Ende der Zeit ΔT übergeht; die von ihr binnen der Zeit ΔT erzeugte Geschwindigkeit (165. §.) muß daher größer seyn, als die Geschwindigkeit, welche die Masse M binnen der Zeit ΔT erlangen würde, wenn auf sie binnen der ganzen Zeit ΔT eine unveränderliche Kraft $= V$ wirkte, und zugleich kleiner als die Geschwindigkeit, die sie erlangen müßte, wenn sie binnen

der-

derselben Zeit von einer unveränderlichen Kraft $= V + \Delta V$ fortgetrieben würde. Demnach ist nach (186. §.) allemal

$$\Delta C > \frac{2gV}{M}\Delta T \text{ und } \Delta C < \frac{2g(V+\Delta V)\Delta T}{M}.$$

4. Nehmen wir hingegen an, die Kraft V nehme allmählich ab, so daß sie binnen der Zeit ΔT um ΔV kleiner wird; so wird nun im ersten Augenblicke der Zeit ΔT die Kraft V, in jedem folgenden Augenblicke aber eine allmählich kleinere, und im letzten Augenblicke die Kraft $V - \Delta V$ in die Masse M wirken: ihre binnen der Zeit ΔT erzeugte Geschwindigkeit ΔC wird nun kleiner seyn als die Geschwindigkeit welche in ihr die Kraft V in der Zeit ΔT erzeugen würde, wenn V unveränderlich wäre, und zugleich größer als die Geschwindigkeit, welche die Masse M in der Zeit ΔT erlangen müßte, wenn binnen der ganzen Zeit ΔT eine unveränderliche Kraft $= V - \Delta V$ auf sie wirkte. Nach (186. §.) wäre also allemal

$$\Delta C > \frac{2g(V-\Delta V)\Delta T}{M} \text{ und } \Delta C < \frac{2gV\Delta T}{M}.$$

5. Es mag ferner die Kraft V was immer für eine Function von T seyn (2); so sollen doch gewisse von ΔT unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. möglich seyn, wofür ist $\Delta V = \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \gamma\Delta T^3 + \text{etc.}$ (59. §.): wegen (3) 4) ist also für jede Differenz ΔT der Zeit T als einer absoluten veränderlichen Größe (2)

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} > \frac{2gV}{M} \text{ und } \frac{\Delta C}{\Delta T} < \frac{2gV}{M} + \frac{2g\alpha}{M}\Delta T + \frac{2g\beta}{M}\Delta T^2 + \text{etc.}$$

oder

oder

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} > \frac{2gV}{M} - \frac{2g\alpha}{M}\Delta T - \frac{2g\beta}{M}\Delta T^2 - \text{etc.}$$

$$\text{und } \frac{\Delta C}{\Delta T} < \frac{2gV}{M}.$$

In beyden Fällen ist daher der Exponent des Differentialverhältnisses der Geschwindigkeit C, als einer Function von der Zeit T (2) nach (69. §.)

$$dC = \frac{2gVdT}{M}.$$

190. §.

1. Zusatz. Aus (172. 189. §.) erhält man für den Weg S, welchen die Masse M binnen der Zeit T zurücklegen würde,

$$d\left(\frac{dS}{dT}\right) = \frac{2gV}{M}dT.$$

Oder, weil T als eine absolute veränderliche Größe betrachtet wird, wofür $dT = 1$ constans ist,

$$d^2S = \frac{2gV}{M}dT^2.$$

191. §.

2. Zusatz. Ferner ist $dT = \frac{MdC}{2gV}$ in (189. §.): aus (172. §.) erhält man also

$$dS = \frac{M}{2g}.\frac{CdC}{V}, \text{ daher}$$

$$S = \frac{M}{2g}\int\frac{CdC}{V}.$$

CdC

$$CdC = \frac{2gV}{M} dS,$$

$$C^2 = \frac{4g}{M} \int V dS.$$

192. §.

Die Formuln, die wir bisher gesucht haben, enthalten die allgemeinsten Gründe der gesammten Mechanik, die man wirklich in seiner Gewalt hat, sobald man sie geschickt anzuwenden, und die dabey vorkommenden Differentialexponenten zu integriren im Stande ist. Ich will in einem Beyspiele zeigen, worauf es bey der Anwendung der vorhergehenden Theorie auf die Bestimmung der Bewegung eines gegebenen Körpers ankömmt, wenn er von einer veränderlichen Kraft getrieben wird.

21. Fig. 1. Man nehme an, auf einem horizontalen Boden UX (21. Fig.) liege ein Körper Aa, dessen Gewicht, und die ihm proportionale Masse = P sey: nach der ebenfalls horizontalen Richtung AB, welche daher zu UX parallel ist, und zugleich durch den Schwerpunct des Körpers Aa fortgeht, wirke auf ihn eine veränderliche Kraft V. Nun aber soll die Bewegung des Körpers Aa, welche in ihm die Kraft V hervorbringt, bestimmt werden.

2. Diese Bestimmung erfordert, daß man im Stande sey, sowohl den Raum S, welchen der Körper Aa in einer gegebenen Zeit T durchlaufen, und die Geschwindigkeit C anzugeben, welche er binnen derselben Zeit erlangen würde. Beydes kann nach der vorhergehenden Theorie mit Hülfe der Integralrechnung geschehen, wenn nur das Gesetz gegeben

wird,

wird, nach welchem die Kraft V sich vom ersten Augenblicke der Bewegung an ändert, damit man durch dasselbe Gesetz bestimmen könne, wie V von C oder T abhängt: denn, wenn dieses bekannt wäre; so könnte man V durch eine Function von C oder T bestimmen, sodann die ganze Bewegung des Körpers Aa beurtheilen. Wüßte man z. B. die Function F = V von T; so hätte man $dC = \frac{2gFdT}{M}$, und die Integration gäbe $C = \frac{2g}{M}\int FdT$: für die so gefundene Geschwindigkeit C könnte man hierauf den Weg S aus der Formul $dS = CdT$ suchen.

3. Nehmen wir an, die Kraft V nehme allmählich ab; der Verlust binnen jeder Zeit T sey der Quadratwurzel derselben Zeit proportional: es sey ferner der bestimmte Verlust φ an der Kraft V für die erste Zeitsecunde bekannt. Bey dieser Voraussetzung soll nun die Bewegung des Körpers Aa auf dem horizontalen Boden UX bestimmt werden.

4. Wegen $1'' : \sqrt{T} = \varphi : \varphi T^{\frac{1}{2}}$ nach (3) ist $\varphi T^{\frac{1}{2}}$ der Verlust an der Kraft V für die ganze Zeit T: nach Verlauf der Zeit T wirkt also, statt der anfänglichen Kraft V, die Kraft $V - \varphi T^{\frac{1}{2}}$ auf den Körper Aa.

5. Das Gewicht P des Körpers Aa wird vom horizontalen Boden UX getragen, und dasselbe hat keinen Einfluß in die von der, nach der horizontalen, und durch den Schwerpunct von Aa gehenden Richtung AB der Kraft V abhängige Bewegung des Körpers Aa: wenn wir daher

voraus-

voraussetzen, daß zwischen ihm und dem Boden UX keine Reibung vorhanden ist; so ist keine Kraft da, die der Kraft V entgegen stünde. Am Ende der Zeit T wird also die Bewegung des Körpers Aa von einer Kraft $V - \varphi T^{\frac{1}{2}}$ abhängen (4). Daher, weil P die dem Gewichte von Aa proportionale Masse bedeutet, erhält man für die Geschwindigkeit C, welche der Körper Aa binnen der Zeit T erlangen muß, nach (189. §.)

$$dC = \frac{2g}{P}\left(V - \varphi T^{\frac{1}{2}}\right) dT.$$

Also ist die Geschwindigkeit selbst

$$C = \int \frac{2g}{P}\left(VdT - \varphi T^{\frac{1}{2}} dT\right)$$

$$= \frac{2g}{P}\left(VT - \frac{2}{3}\varphi T^{\frac{3}{2}}\right) + \text{Const.}$$

Da ferner diese Geschwindigkeit im Anfange der Bewegung = 0 seyn soll, nämlich C = 0 für T = 0; so ist Const = 0: also die vollständige Geschwindigkeit für jede Zeit T

$$C = \frac{2g}{P}\left(VT - \frac{2}{3}\varphi T^{\frac{3}{2}}\right).$$

6. Es ist aber bey jeder Bewegung dS = CdT (172. §.): bey dieser Bewegung muß demnach seyn, nach (5)

$$dS = \frac{2g}{P}\left(VT - \frac{2}{3}\varphi T^{\frac{3}{2}}\right) dT: \text{ also}$$

$$S = \frac{2g}{P}\left(\frac{1}{2} VT^2 - \frac{4}{15}\varphi T^{\frac{5}{2}}\right) + \text{Const.}$$

Weil

Weil hier $S = 0$ für $T = 0$ seyn muß; so ist auch Const $= 0$: also ist

$$S = \frac{2g}{P}\left(\frac{1}{2} V T^2 - \frac{4}{15} \varphi T^{\frac{5}{2}}\right)$$

der ganze Raum, welchen der Körper Aa auf dem horizontalen Boden UX binnen der Zeit T durchlaufen muß.

7. Die Geschwindigkeit in (5) wird zweymal gleich Null, für $T = 0$, und für $T = \frac{9V^2}{4\varphi^2}$: hieraus folgt, daß sie am Ende einer gewissen Zeit T, zwischen $T = 0$ und $T = \frac{9V^2}{4\varphi^2}$ am größten wird. Diese Zeit zu bestimmen, setze man dC in (5) gleich Null, nach (II. Band. 74. §.): dafür erhält man auch

$$V - \varphi T^{\frac{1}{2}} = 0: \text{ also } T = \frac{V^2}{\varphi^2}.$$

Diese Zeit giebt in (5)

$$C = \frac{2g}{P}\left(\frac{V^3}{\varphi^2} - \frac{2}{3}\varphi . \frac{V^3}{\varphi^3}\right) = \frac{2gV^3}{3P\varphi^2}.$$

8. Es war aber $V - \varphi T^{\frac{1}{2}}$ die Kraft, welche nach Verlauf der Zeit T im nächst folgenden Augenblicke auf den Körper Aa wirken, und seine Bewegung ferner beschleunigen sollte (5): da sie also in der Zeit, und für die Geschwindigkeit, die wir in (7) bestimmt haben, gleich Null wird; so erhellet daraus, daß die Bewegung des Körpers Aa nur so lange beschleunigt wird, bis er in der bestimmten Zeit $T = \frac{V^2}{\varphi^2}$ die Geschwindigkeit $C = \frac{2gV^3}{3P\varphi^2}$ erlanget (7), womit er hierauf gleichförmig fortgehen muß, wenn sonst nichts da ist, was seine Bewegung hindern mag.

9. Will man den Raum wissen, welchen der Körper Aa durchlaufen muß, bis er die größte Geschwindigkeit (7) erlanget; so nehme man den Werth von T aus (7) in (6): denn er giebt:

$$S = \frac{2g}{P}\left(\frac{1}{2}.\frac{V^5}{\varphi^4} - \frac{4}{15}\varphi.\frac{V^5}{\varphi^5}\right) = \frac{7gV^5}{15P\varphi^4} = \frac{7V^2}{10\varphi^2}C.$$

Z. B. Sey des Körpers Aa Gewicht, und die ihm proportionale Masse P = 300 ℔; die anfängliche Kraft V = 60 ℔; und ihr Verlust in der ersten Secunde φ = 10 ℔; und wegen (178. §.) g = 15,625 Rheinl. Fuß: so ist in (8) 9).

$$T = \frac{60.60}{10.10} = 36''.$$

$$C = \frac{2.15,625.60.60.60}{3.300.10.10} = 75 \text{ Fuß}.$$

$$S = \frac{7.60.60.75}{10.10.10} = 1890 \text{ Fuß}.$$

Der Körper Aa fängt daher an, mit beschleunigter Bewegung vorzurücken; diese Bewegung dauret aber nur 36 Secunden = T, binnen welcher Zeit er einen 1890 Rheinl. Fuß langen Weg zurücklegt, und eine Geschwindigkeit = 75 Fuß erlanget, womit er darauf gleichförmig fortgeht, so daß er in jeder Secunde 75 Fuß, mithin in jeder Zeit t einen Weg = 75.t Fuß durchläuft (170. §.).

193. §.

7. Fig. **Aufgabe.** Ein Punct ist mit der Geschwindigkeit c an den Punct A einer krummen Linie ABCDE angelangt, mit welcher er seine Bewegung in derselben

selben krummen Linie fortsetzen soll: es ist sonst keine Kraft da, welche seine Bewegung beschleunigen, auch nichts ist da, die Krümmung des Weges ABCDE ausgenommen, welches dieselbe Bewegung verzögern könnte. Man soll die Geschwindigkeit finden, die er am Ende E derselben Linie haben wird.

Auflösung. 1. Es soll möglich seyn, am Puncte A eine Tangente zu ziehen, und damit eine Sehne AB unter einem sehr kleinen Winkel ω zu verbinden, dergestalt, daß hierauf mehrere andere Sehnen BC, CD, DE gezogen werden können, derer jede gegen die nächst vorhergehende eben die Lage habe, welche die erste AB gegen die Tangente an A hat, daß demnach der Winkel $bBC = cCD, = dDE = \omega$ ist. Je kleiner der gemeinschaftliche Neigungswinkel ω angenommen wird, desto mehrere und kleinere Sehnen werden da seyn, und desto mehr wird sich die aus ihnen bestehende gebrochene Linie ABCDE der krummen Linie ACE nähern, wenn gleich der letzte Punct jener Linie, mit dem letzten Puncte E der krummen Linie vielleicht nie genau zusammenfällt. Aus dem allen kann man indessen nichts mehr abnehmen, als daß die krumme Linie ACE die Gränze ist, welcher sich die gebrochene Linie ABCDE ohne Ende nähern kann, wenn der gemeinschaftliche Neigungswinkel ω ihrer Seiten ohne Ende abnimmt: doch folgt hieraus ganz gewiß, daß auch die Geschwindigkeit, welche der bewegte Punct im Puncte E der krummen Linie ACE haben würde, wenn er von A an, in derselben krummen Linie bis E fortgienge, als die Gränze kann betrachtet werden, welcher die Geschwin-

digkeit, die der bewegte Punct am Ende der gebrochenen Linie ABCDE erlangen würde, wenn er sich von A an in dieser Linie bewegte, ohne Ende nähern muß, wenn beym unaufhörlich abnehmenden Neigungswinkel $\omega = bBC = cCD =$ etc. die Anzahl der Sehnen AB, BC, etc. ohne Ende zunimmt.

2. Bey der Bestimmung der Geschwindigkeit, welche der bewegte Punct am Endpuncte E, der krummen Linie ACE haben muß, kömmt daher alles darauf an, daß man den Neigungswinkel $\omega = bBC = cCD =$ etc. und damit auch die Anzahl der Sehnen AB, BC, etc. ganz unbestimmt annehme, hernach einen Ausdruck für die Geschwindigkeit suche, welche der bewegte Punct am Ende der so unbestimmten gebrochenen Linie ABCDE haben muß, und dann untersuche, ob es nicht einen völlig bestimmten Werth giebt, welchem derselbe Ausdruck als seiner Gränze sich nähern müßte, wenn der Neigungswinkel unaufhörlich abnähme: denn ein solcher Werth wird die verlangte Geschwindigkeit seyn (1).

6. Fig. 3. Gesetzt, ein Punct bewege sich mit einer unveränderlichen Geschwindigkeit k in der geraden Linie AB (6. Fig.), in B aber werde er genöthigt seine Richtung zu ändern, und über BC zu gehen. Der Neigungswinkel der Richtung AB gegen die neue BC sey $ABD = \omega$, Ab zu DC parallel, und Ad, bB auf DC senkrecht. Setzt man die Geschwindigkeit $k = AB$; so wird diese in die Seitengeschwindigkeiten $Ab = AB \operatorname{Cof} ABD$, und $Ad = AB \operatorname{Sin} ABD$ zerlegt: die zweyte Geschwindigkeit wird von DC zernichtet; die erste

ist

ist aber zu DC parallel, mithin drückt sie diejenige Geschwindigkeit aus, mit welcher der bewegte Punct seine Bewegung von B an über BC fortsetzen würde: diese ist daher $= AB \, Cos \, ABD = k \, Cos \, \omega$.

4. Nehmen wir daher an, der bewegliche Punct, welcher mit der Geschwindigkeit c an den Punct A der krummen Linie ACE angelangt ist, werde genöthigt, seine Bewegung in der gebrochenen Linie ABCDE fortzusetzen, welche aus einer unbestimmten Anzahl von Seiten AB, BC, CD, etc. bestehen mag, die gegen einander einerley von dem unbestimmten Winkel $\omega = CBC = cCD = dDE$, etc. abhängige Lage haben (1) 2): so hat derselbe Punct am Endpuncte B der ersten Sehne AB eine Geschwindigkeit $= c \, Cos \, \omega$ nach (3); daher ist $c \, Cos \, \omega^2$ seine Geschwindigkeit am Ende der zweyten Sehne BC, nach (3), und wenn $c \, Cos \, \omega^n$ die Geschwindigkeit wäre, welche er am Ende der nten Sehne haben müßte; so hätte er am Ende der (n+1)ten Sehne die Geschwindigkeit $= c \, Cos \, \omega^n . Cos \, \omega$ nach (3) $= c \, Cos \, \omega^{n+1}$. Die gebrochene Linie ABCDE mag daher was immer für eine Anzahl r von Seiten haben; so ist doch allemal $c \, Cos \, \omega^r$ die Geschwindigkeit, welche der bewegte Punct an ihrem Endpuncte haben müßte. Wegen (28. §.) ist sie also: 7. Fig.

$$c\left(1 - \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2...6} + \frac{\omega^8}{1.2...8} - \text{etc.}\right)^r.$$

und für

$$Z = -\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{\omega^6}{1.2...6} + \text{ etc. ist sie}$$

 $c(1+Z)^r$

$$c(1+Z)^r = c\left(1 + rZ + \frac{r(r-1)}{1.2}Z^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}Z^3 + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4}Z^4 + \cdots + Z^r\right)$$

$$= c + c\left(rZ + \frac{r(r-1)}{1.2}Z^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}Z^3 + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4}Z^4 + \cdots + Z^r\right).$$

Nimmt nun der Winkel ω allmählich ab; so nähert sich Z der Gränze $= 0$, der Unterschied zwischen $c(1+Z)^r$ und c wird immer kleiner, und man sieht leicht ein, warum er, wegen Z, kleiner werden kann, als jede wie immer kleine denkbare gleichartige Größe (3. §.), wie immer auch die Anzahl r der Sehnen beym abnehmenden gemeinschaftlichen Neigungswinkel ω zunimmt: c ist also die Gränze, welcher die Geschwindigkeit $c(1+Z)^r$ sich nähert, ohne sie je zu erreichen, wenn nicht $\omega = 0$ gesetzt wird; und c ist daher auch die Geschwindigkeit, welche der bewegte Punct am Ende der krummen Linie ACE haben muß, wegen (2).

194. §.

Zusatz. Wenn ein Punct genöthigt wird, seine Bewegung mit irgend einer Geschwindigkeit c in einer krummen Linie fortzusetzen; so wird diese Geschwindigkeit wegen der Krümmung des Weges keine Aenderung leiden, es wird vielmehr derselbe Punct mit der ungeänderten Geschwindigkeit c fortgehen, wenn sonst nichts da ist, was seine Bewegung störte (193. §.) Daher wenn ein Punct von einer Kraft in einer krummen Linie beständig nach der Richtung der

Tan-

Tangente an jeder Stelle getrieben wird; so wird seine Bewegung von derselben Kraft eben so geändert werden, als wenn sie nach der Richtung der Tangente geschehe.

195. §.

Lehrsatz. Wenn ein Körper bloß wegen seiner Schwere dergestalt bewegt wird, daß sein Schwerpunct eine krumme Linie AMC durchläuft, die ganz in einer verticalen Ebene liegt; so erlangt er in C eine Geschwindigkeit, die derjenigen gleich ist, welche er erlangen würde, wenn er frey durch die verticale Höhe BC fiele. 8. Fig.

Beweis. Es soll nämlich AB horizontal, und BC vertical, daher BC die Höhe des Puncts A über C seyn.

Sey $s = AM$ der binnen einer Zeit bereits zurückgelegte Bogen, und c die in derselben Zeit erlangte Geschwindigkeit. $MP = y$ sey parallel zu AB, und $BP = x$. Wird nun an M die Tangente TS gezogen; so ist nach (134. §.),

$$\text{Tang PMS} = \frac{dx}{-dy}; \text{ also ist}$$

$$\text{Sin PMS} = \frac{dx}{\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}.$$

Da sich nun der bewegte Körper an der Stelle M befindet, dergestalt, daß sein Schwerpunct mit dem Puncte M der krummen Linie AC zusammenfällt; so sey Ma zu BC parallel, folglich vertical, und die Richtung, nach welcher des bewegten Körpers Schwerpunct von seinem Gewichte, das wir P nennen wollen, unterwärts gedrückt wird. Zieht man ab, cM auf TS senkrecht, und ac zu TS parallel;

 so

so kann die Kraft P, von welcher der Schwerpunct nach der verticalen Richtung Ma gedrückt wird, wenn man sie $= Ma$ setzt, in zwo Seitenkräfte, $Mc = P \operatorname{Sin} aMb$, und $Mb = P \operatorname{Cos} aMb$ zerlegt werden. Von der ersten Kraft wird der Schwerpunct nach der auf die Tangente TS senkrechten Richtung gegen die krumme Linie AMC gedrückt, die daher von dieser ganz aufgehalten wird; aber die Richtung der Kraft Mb fällt mit der Tangente MS zusammen, sie allein giebt demnach diejenige bewegende Kraft ab, welche den Schwerpunct zur Fortsetzung der Bewegung über MC an der Stelle M antreibt. Wegen (194. §.) nach (191. §.) ist.

$$cdc = \frac{2g \cdot Mb}{P} ds = \frac{2gP \operatorname{Cos} aMb}{P} ds$$

$$= 2g \operatorname{Sin} PMS \cdot ds.$$

Nimmt man demnach den obigen Werth für Sin PMS, und den von ds nach (144. §.); so findet man:

$$cdc = 2gdx, \text{ und dieses giebt}$$

$$\tfrac{1}{2} c^2 = 2gx, \; c^2 = 4gx, \text{ und } c = 2\sqrt{gx}.$$

Für $x = BC$ wäre demnach die Geschwindigkeit in C so groß, als die Geschwindigkeit $2\sqrt{g \cdot BC}$, welche der schwere Körper beym freyen Fall durch die Höhe Bc erlangen würde (177. §.).

196. §.

9. Fig. **Erklärung.** Wenn eine gerade Linie RC (9. Fig.) um ihren festen Endpunct C bewegt wird; so beschreibt jeder ihrer Puncte in einer Zeit T einen Kreisbogen um C, etwa der Punct R den Bogen RS, und die ganze Linie durch-

durchläuft den Winkel RCS: die wahre Geschwindigkeit des Puncts R am Ende der Zeit T wird durch den Kreisbogen ST geschätzt, um welchen er in der nächsten darauf folgenden Zeitsecunde vorrücken würde, wenn die Geschwindigkeit, die er am Ende der Zeit T haben mag, ungeändert bliebe: hingegen wird dem Puncte R, und so auch allen Puncten der geraden Linie RC auch eine Winkelgeschwindigkeit zugeeignet, und durch den Winkel SCT geschätzt, um welchen die Linie RC, in der nach Verlauf der Zeit T nächstfolgenden Zeitsecunde weiter um C sich drehen würde, wenn ihre binnen derselben Zeit erlangte Winkelgeschwindigkeit ungeändert bliebe.

197. §.

1. Zusatz. Die wahren Geschwindigkeiten, welche einzelne Puncte einer geraden um ihren festen Endpunct C beweglichen Linie RC, während der Umdrehung in einer Zeit T erlangen können, verhalten sich gegen einander, wie ihre Entfernungen vom Mittelpuncte C der Bewegung (196. §.)

198. §.

2. Zusatz. Alle Winkel verhalten sich gegen einander wie die aus ihren Spitzen und zwischen ihren Schenkeln mit einem bestimmten Halbmesser beschriebenen Kreisbogen: in der Folge soll daher die Winkelgeschwindigkeit, welche eine gerade um C bewegliche Linie RC, und jeder ihrer Puncte binnen einer Zeit T erlangen mag, durch den aus C mit dem Halbmesser $= 1$, zwischen den Schenkeln CS, TC desjenigen Winkels SCT beschriebenen Bogen φ geschätzt

werden, der sonst jene Winkelgeschwindigkeit ausdrücken sollte. (196. §.).

199. §.

3. Zusatz. Daher ist $ST : \varphi = SC : 1$ (198. §.), und nun $ST = \varphi . SC$, $\varphi = \frac{ST}{SC}$. Aus der wahren Geschwindigkeit eines Puncts R erhält man seine Winkelgeschwindigkeit, wenn man jene durch seine Entfernung vom Mittelpuncte der Bewegung dividirt; multiplicirt man hingegen damit die Winkelgeschwindigkeit; so giebt das Product die wahre Geschwindigkeit (196. 198. §.).

200. §.

4. Zusatz. Wenn am Puncte R sich eine Masse M befindet, welche als ein Punct, ganz in R beysammen mag betrachtet werden, und auf R eine unveränderliche Kraft U beständig nach der auf RC senkrechten Richtung RU wirkt; so wird die Bewegung des Puncts R und der an ihm befindlichen Masse M um C eben so beschleunigt werden, als wenn die Kraft U die Masse M nach der geradlinichten Richtung RU forttriebe (194. §.): binnen einer Zeit T erlanget also der Punct R und die Masse M nach (186. §.) eine wahre Geschwindigkeit

$$c = \frac{2gU}{M} T,$$

und Winkelgeschwindigkeit (199. §.)

$$\gamma = \frac{c}{RC} = \frac{2gU}{M . RC} T.$$

201. §.

201. §.

5. Zusatz. Wäre hingegen ACa (10. Fig.) eine gerade, oder in C gebrochene um den festen Punct C bewegliche Linie, wobey im zweyten Fall der Winkel ACa unveränderlich seyn mag; so würde der an A stets nach der auf AC senkrechten Richtung AU wirkenden unveränderlichen Kraft U eine, an irgend einem andern Puncte a angebrachte Kraft $= \frac{U.AC}{aC}$ das Gleichgewicht halten, wofern sie nach entgegengesetzter, auf aC senkrechter Richtung aq wirkte: erfolgt demnach die Bewegung; so wird der Punct a nach der Richtung ar, von der Kraft U in jedem Augenblicke mit eben der Gewalt gedrückt, als wenn keine Kraft an A, sondern eine $= \frac{U.AC}{aC}$ an a nach der auf aC senkrechten Richtung ar wirkte. Befindet sich also eine wie ein Punct zu betrachtende Masse m an a; so ist die Winkelgeschwindigkeit G, welche der Punct a, mithin auch A (196. §.) wegen der auf A wirkenden Kraft U binnen der Zeit T erlanget, nach (200. §.). 10. Fig.

$$G = \frac{\frac{2g.U.AC}{aC}}{m.aC} . T = \frac{2gU.AC}{m.aC^2} T.$$

202. §.

6. Zusatz. Ist MN (11. Fig.) eine feste Axe, womit zwo gerade unbiegsame Linien $\beta\alpha$, AB unter rechten Winkeln verbunden seyn mögen; so kann man sich die Vorstellung machen, daß, wenn eine unveränderliche Kraft U nach der auf AB senkrechten und mit AB in einer auf MN senkrechten Ebene liegenden Richtung wirkte, sich AB, 11. Fig.

und

und $\alpha\beta$ mit einerley Winkelgeschwindigkeiten um MN drehen müßten, wie AC und aC in (201. §.), dergestalt, daß beyde Puncte β, A eine gewisse, binnen der Zeit T zu erlangende Winkelgeschwindigkeit γ oder G haben müßten, nachdem an A eine Masse M, oder keine an A, und eine m an β sich befände: daher wäre, wie in (200. 201. §.)

$$\gamma = \frac{2gU}{M.AB}T; \quad G = \frac{2g.U.AB}{m.\alpha\beta^2}T.$$

203. §.

7. Zusatz. Die Winkelgeschwindigkeiten γ, G werden in (202. §.) nur alsdann einander gleich seyn, wenn $\frac{1}{M.AB} = \frac{AB}{m.\alpha\beta^2}$, daher $m.\alpha\beta^2 = M.AB^2$ ist.

204. §.

8. Zusatz. In (202. §.) ist $U = \frac{m.\alpha\beta^2.G}{2g.AB.T}$ die Kraft, welche am Puncte A erfordert wird, eine gewisse Winkelgeschwindigkeit G, binnen einer Zeit T zu erzeugen: sie hängt von der am Puncte β befindlichen Masse dergestalt ab, daß sie bey gleichen übrigen Größen $\alpha\beta$, G, 2g, AB, T im geraden Verhältnisse mit m zu- und abnimmt.

205. §.

11. Fig. Aufgabe. Es sind, so viel man will, Massen R, P, Q, S, als eben so viele Puncte, sowohl unter einander, als mit einer festen Axe MN dergestalt verbunden, daß, sobald nur eine unter ihnen sich um MN zu drehen anfängt, alle sich um dieselbe Axe bewegen müssen: auf gleiche Art ist ein Punct A damit verbunden, auf welchen eine unveränderliche Kraft U bestän-

beständig nach der auf die Entfernung AB des Puncts A von der Umdrehungsaxe MN senkrechten, und in der ebenfalls auf MN senkrechten Ebene, worauf AB während der Umdrehung im Kreise herumgehen würde, liegenden Richtung auf A wirkt: man soll die Winkelgeschwindigkeit des Puncts A für die Zeit T bestimmen.

Auflösung. 1. Es ist klar, daß, wegen der Verbindung der Massen R, P, Q, S, und des Puncts A unter einander, und mit der Umdrehungsaxe MN, alle Puncte in eine solche Kreisbewegung um MN gesetzt werden müssen, sobald die Kraft U den Punct A in Bewegung setzt, wobey ihre senkrechten Entfernungen Rr, Pp, Qq, Ss, AB von MN in jeder Zeit T durch gleiche Winkel vorrücken, daß demnach alle Puncte einerley Winkelgeschwindigkeit binnen jeder Zeit T erlangen müssen, die wir K nennen wollen.

2. Nun wird zu jeder einzelnen Masse R, P, Q, S eine bestimmte Kraft am Puncte A erfordert, die Winkelgeschwindigkeit K in der Zeit T zu erzeugen, so daß an A

für R allein die Kraft $\frac{R.Rr^2.K}{2g.AB.T}$

für P allein die Kraft $\frac{P.Pp^2.K}{2g.AB.T}$

für Q allein die Kraft $\frac{Q.Qq^2.K}{2g.AB.T}$

für S allein die Kraft $\frac{S.Ss^2.K}{2g.AB.T}$

nöthig wäre (204. §.); so groß nämlich müßten die an A nach der auf AB senkrechten Richtung anzubringenden Kräfte

seyn,

seyn, wenn die Masse R, oder P, oder Q, oder S allein da wäre, und in jedem Fall der Punct A die bestimmte Winkelgeschwindigkeit K binnen der Zeit T erlangen müßte; größere Kräfte, oder kleinere, würden eine größere oder kleinere Winkelgeschwindigkeit binnen derselben Zeit erzeugen (202. §.). Wenn also alle diese Kräfte am Puncte A nach einer auf AB senkrechten Richtung AU angebracht wären; so würden auch jetzt alle Puncte R, P, Q, S, A mit einerley Winkelgeschwindigkeit um MN sich drehen, welche = K am Ende der Zeit T seyn würde, und eine Kraft, welche größer oder kleiner wäre, als die Summe jener Kräfte, würde auch eine andere Winkelgeschwindigkeit binnen der Zeit T erzeugen. Daher, weil die gegebene Kraft U dieselbe Winkelgeschwindigkeit erzeugen soll, ist

$$U = \frac{R.Rr^2.K}{2g.AB.T} + \frac{P.Pp^2.K}{2g.AB.T}$$

$$+ \frac{Q.Qq^2.K}{2g.AB.T} + \frac{S.Ss^2.K}{2g.AB.T},$$

mithin die Winkelgeschwindigkeit

$$K = \frac{2g.AB.U.T}{R.Rr^2 + P.Pp^2 + Q.Qq^2 + S.Ss^2}.$$

206. §.

Zusatz. Stellt man sich vor, daß alle Massen R, P, Q, S wegbleiben, und eine einzige Masse M am Puncte A angebracht wird; so wird die darauf wirkende Kraft U die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2gU}{M.AB}T$ binnen der Zeit T

erlan-

erlangen (200. §.), und diese wird der im (205. §.) nur alsdann gleich seyn, wenn

$$M.AB^2 = R.Rr^2 + P.Pp^2 + Q.Qq^2 + S.Ss^2 \text{ ist.}$$

207. §.

Erklärung. Das Product aus jeder Masse, wenn sie in einem Puncte beysammen betrachtet wird, in das Quadrat der Entfernung derselben von einer Axe, um die sie herumgedreht wird, heißt das **Moment derselben Masse**, oder ihr **Moment der Trägheit**: und das **Moment der Trägheit** jeder wie immer großen um eine feste Axe beweglichen Masse wird durch die Summe der Momente der Trägheit aller an ihr denkbaren materiellen Puncte in Ansehung derselben Axe, mithin durch die Summe der Producte aus allen materiellen an der gegebenen Masse denkbaren Puncten, in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Undrehungsaxe bestimmt.

208. §.

1. Zusatz. Das Moment der Trägheit jeder aus mehrern Theilen zusammengesetzten Masse in Ansehung einer gegebenen Umdrehungsaxe ist der Summe der Momente der Trägheit aller einzeln genommenen Theile in Ansehung derselben Axe gleich (207. §.).

209. §.

2. Zusatz. Bestehet eine Masse M aus zweenen Theilen P, Q; so ist das Moment der Trägheit des einen Theils P in Ansehung einer gegebenen Umdrehungsaxe so groß als die Differenz des Moments des andern Theils Q vom

Momente

Momente der ganzen Masse M in Ansehung derselben Umdrehungsaxe (208. §.).

210. §.

12. Fig. 3. Zusatz. Seyen R, T zweene materielle Puncte einer Masse ABC (12. Fig.); G sey ihr Schwerpunct; ZX eine Axe durch G, und UV zu ZX parallel: aus R, T fallen auf die Ebene, in welcher die Axen ZX, UV liegen mögen, die senkrechten Linien Rr, Tt; so wird tg und rg senkrecht auf UV sowohl als auf ZX seyn, denkt man sich nun die Linien TG, Tg, RG, Rg, durch welche die senkrechten Entfernungen der Puncte T, R von den Axen ZX, UV bestimmt werden; so sind $T.TG^2$, $T.Tg^2$, $R.RG^2$, $R.Rg^2$ die Momente der Trägheit der materiellen Puncte T, R in Ansehung der Axen ZX, UV (207. §.); Gg ist die Entfernung des Schwerpuncts von der Axe UV, und rG, tG sind die Entfernungen der Puncte R, T von einer durch ZX auf der Ebene ZXVU senkrecht stehenden Ebene der Schwere von ABC, mithin sind R.rG, T.tG die statischen Momente der Puncte R, T in Ansehung derselben Ebene. Dafür ist aber

$$R.Rg^2 = R(RG^2 - rG^2 + rg^2)$$
$$= R.RG^2 + R.Gg^2 - 2.R.rG.Gg.$$
$$T.Tg^2 = T(TG^2 - tG^2 + tg^2)$$
$$= T.TG^2 + T.Gg^2 + 2.T.tG.Gg.$$

211. §.

11. Fig. 4. Zusatz. Wenn eine Masse m am Puncte β (11. Fig.) beständig in der Entfernung $\beta\alpha$ von der Umdrehungsaxe MN von einer unveränderlichen auf den Punct A, der in

einem

einem Kreise um MN beweglichen und auf MN senkrechten Linie AB beständig nach der Richtung der Tangente desselben Kreises wirkenden Kraft U um MN bewegt wird; so erlanget der Punct A binnen jeder Zeit T eine solche Winkelgeschwindigkeit, welche er erlangen würde, wenn an β keine, an A aber eine Masse $M = \frac{m \cdot \alpha\beta^2}{AB^2}$ vorhanden wäre (203. §.), wobey $m \cdot \alpha\beta^2$ das Moment der Trägheit der Masse m an β in Ansehung der Umdrehungsaxe MN ist (207. §.).

212. §.

5. Zusatz. Wenn ein fester Körper ABC (12. Fig.) 12. Fig. in einer bestimmten Entfernung von der gegebenen Axe UV von irgend einer unveränderlichen an einem damit verbundenen Puncte l angebrachten Kraft um MN bewegt wird; so geschieht die Umdrehung desselben um die Axe MN nicht anders, als wenn seine Bestandtheilchen sich an Endpuncten der senkrechten Linien befänden, die man aus ihnen auf die Axe MN in Gedanken kann fallen lassen: die Winkelgeschwindigkeit des Puncts l wird also am Ende jeder Zeit T derjenigen gleich seyn, welche dieselbe Kraft erzeugen würde, wenn statt des Körpers ABC eine einzige Masse M, so groß als die Summe der Producte aus allen denkbaren materiellen Bestandtheilchen des Körpers ABC in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe UV durch das Quadrat der Entfernung lg des Puncts l dividirt, sich befände (206. §.), wobey jene Summe das Moment der Trägheit des ganzen Körpers ABC in Ansehung der Umdrehungsaxe UV geben würde (207. §.).

213. §.

6. Zusatz. Die bewegende Kraft U, von welcher eine Masse Q um eine feste Axe bewegt wird, mag auf was immer für einen Punct in der Entfernung E von derselben Axe unmittelbar wirken; so läßt sich, wenn μ das Moment der Trägheit der Masse Q in Ansehung jener Axe gegeben ist, allemal die Masse $\frac{\mu}{E^2}$ bestimmen, welche man, statt der Masse Q, an dem Puncte, worauf die Kraft unmittelbar wirkt, denken kann, ohne dadurch die Winkelgeschwindigkeit zu ändern (211. 212. §.): eine solche Masse $\frac{\mu}{E^2}$ kann die der Masse Q zugehörige gleichgültige Masse heißen.

214. §.

12. Fig. 7. Zusatz. Das Moment der Trägheit eines festen Körpers ABC (12. Fig.) in Ansehung der gegebenen Umdrehungsaxe UV sey μ, und m die Masse selbst. Will man sich die ganze Masse m in einem Puncte beysammen, in einer solchen Entfernung x von der Umdrehungsaxe UV denken, wobey das Moment der Trägheit von m, dem Moment μ gleich sey; so muß man sich bey x eine solche gerade Linie denken, für welche $m.x^2 = \mu$ seyn mag (207. §.), woraus denn $x^2 = \frac{\mu}{m}$ folgt. Aus diesem Grunde pflegt man das Moment der Trägheit eines jeden Körpers ABC in Ansehung einer Umdrehungsaxe UV, wenn seine Masse M ist, mit $Mkk = Mk^2$ zu bezeichnen, wobey k die gerade Linie bedeutet, mit deren Quadrat die Masse M multiplicirt, jenes Moment geben würde, und man

man weiß, daß man sie, für bekanntes Moment finden würde, wenn man dieses durch die Masse M selbst dividirte.

215. §.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit μ einer körperlichen Masse m = ABC (12. Fig.) in Ansehung einer durch ihren Schwerpunct G laufenden Axe ZX ist gegeben; eine andere Axe UV ist in einer bestimmten Entfernung zu jener parallel: man soll das Moment der Trägheit derselben Masse in Ansehung der Axe UV bestimmen. 12. Fig.

Auflösung. Man addire zum Momente μ der Trägheit der Masse m = ABC in Ansehung der Axe ZX das Product $m \cdot Gg^2$ aus der Masse selbst in das Quadrat der Entfernung ihres Schwerpuncts von der neuen Axe UV; so wird die Summe das verlangte Moment der Trägheit derselben Masse in Ansehung der Axe UV seyn.

Beweis. 1. Man bilde sich eine durch den Schwerpunct G gehende Ebene ZX ein, welche auf der Ebene ZXVU, worauf die Axen liegen, senkrecht stehe; so theilt sie die ganze Masse in zweene Theile ABX, ACX, und sie ist eigentlich eine Ebene der Schwere.

2. Daher ist das statische Moment von ABX, dem statischen Momente von ACX in Ansehung der Ebene ZX, oder die Summe der Producte aus allen in ABX denkbaren materiellen Theilchen in ihre Entfernungen von der Ebene ZX der Summe der Producte aus allen in ACX denkbaren materiellen Theilchen in ihre Entfernungen von der Ebene ZX gleich.

3. Das Product aus der ganzen Masse ABX (1) in das Quadrat der Entfernung des Schwerpuncts G von der Axe UV sey $ABX.Gg^2$; und das aus der Masse ACX (1) sey $ACX.Gg^2$; die Summe der Producte aus allen materiellen Theilchen von ABX in ihre Entfernungen von der Ebene ZX sey P, und die Summe der Producte aus allen Theilchen von ACX in ihre Entfernungen von der Ebene ZX sey Q: so ist, wegen (207. 210. §.), wenn z, y die Momente der Trägheit von ABX und ACX in Ansehung der Axe UV sind, und α, β die Momente davon in Ansehung der Axe ZX bedeuten:

$$z = \alpha + ABX.Gg^2 - 2P.Gg.$$
$$y = \beta + ACX.Gg^2 + 2Q.Gg.$$

Da also $\alpha + \beta = \mu$ das Moment der ganzen Masse $ABC = m$ in Ansehung der Axe ZX, und $z + y$ das Moment davon in Ansehung der Axe UV ist (208. §.), ferner $P = Q$ nach (2); so ist das verlangte Moment $z + y = \alpha + \beta + ABX.Gg^2 + ACX.Gg^2 - 2P.Gg + 2Q.Gg = \mu + (ABX + ACX)Gg^2 = \mu + m.Gg^2$.

216. §.

1. Zusatz. Das Product aus jeder Masse ABC in das Quadrat der Entfernung ihres Schwerpuncts G von einer gegebenen Umdrehungsaxe UV vom Momente ihrer Trägheit in Ansehung derselben Axe abgezogen, giebt das Moment der Trägheit der Masse ABC in Ansehung der durch ihren Schwerpunct G gehenden zur vorigen UV parallelen Axe ZX (215. §.).

217. §.

2. Zusatz. Seyen UV, uv zweene einander und der durch den Schwerpunct G laufenden Axe ZX parallele Axen; d, D seyen die Entfernungen des Schwerpuncts G von uv, UV, nämlich $d = Gk$, $D = Gg$; μ sey das Moment der Trägheit der Masse $ABC = m$ in Ansehung der Axe ZX; und P, Q seyen die Momente der Trägheit der Masse $m = ABC$ in Ansehung der Axen uv, UV; so ist $P = \mu + m d^2$ und $Q = \mu + m D^2$ (215. §.). Also ist $P = Q - m(D^2 - d^2)$, und $Q = P + m(D^2 - d^2)$: das heißt: Wenn man vom Momente der Trägheit der Masse ABC in Ansehung der Axe UV das Product aus ihr in die Differenz der Quadrate der Entfernungen ihres Schwerpuncts G von der Axe UV und einer andern parallelen uv abziehet; so giebt der Rest das Moment der Trägheit der Masse ABC in Ansehung der Axe uv: wird aber dasselbe Product zu diesem Momente addirt; so giebt die Summe das Moment der Trägheit der Masse ABC in Ansehung der Axe UV.

218. §.

3. Zusatz. Wenn die Momente der Trägheit P, Q zweener Theile ADC, ABC (13. Fig.) einer Masse ABCDA in Ansehung der durch ihre Schwerpuncte g, G laufenden parallelen Axen MN, PQ bekannt sind; so kann man dadurch das Moment der Trägheit X der ganzen Masse ABCDA in Ansehung einer dritten zu den vorigen parallelen Axe zy, oder uv bestimmen. Denn wenn Gb, Gβ, ga, gα die senkrechten Entfernungen der Schwerpunkte G, g von 13. Fig.

 den

den Axen zy, uv sind; so ist nach (215. 208. §.) das Moment der Trägheit der ganzen Masse ABCD.

In Ansehung der Umdrehungsaxe zy

$$X = P + Q + ADC \cdot ga^2 + ABC \cdot Gb^2;$$

und in Ansehung der Axe uv

$$X = P + Q + ADC \cdot g\alpha^2 + ABC \cdot G\beta^2.$$

219. §.

14. Fig. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines geraden Cylinders in Ansehung seiner Axe zu finden.

Auflösung. 1. Man denke sich einen Cylinder auf der Grundfläche ABD (14. Fig.), der sich um seine darauf in C senkrechte Axe drehen soll. Die Axe selbst, wodurch zugleich des Cylinders Höhe bestimmt wird, sey a; der Halbmesser der Grundfläche CA = R, und 1 : π das Verhältniß des Halbmessers zur halben Peripherie; so ist πR^2 der Quadratinhalt der Grundfläche, und $\pi a R^2$ der Cubikinhalt, oder die Masse des ganzen Cylinders.

2. Ein Stück des Halbmessers sey Ca = x, welches um ab = Δx wachsen mag; so ist das Moment der Trägheit μ des Cylinders auf der Grundfläche gha eine Function von x, welche um $\Delta\mu$ das Moment der Trägheit der cylindrischen Röhre zugenommen hat, die man sich auf der Grundfläche ghabef denken kann, so daß sie einerley Höhe a mit dem ganzen Cylinder in (1) habe.

3. Da nun alle zwischen den beyden Oberflächen agb, cbf der cylindrischen Röhre in (2) enthaltene materielle Bestandtheilchen gewiß in größeren Entfernungen von der

Axe

Axe a in C liegen, als der Halbmesser $Ca = x$ ist, und in kleineren als der Halbmesser $Cb = x + \Delta x$ ist; so erhellet aus (207. §.), daß das Moment der Trägheit $\Delta\mu$ derselben cylindrischen Röhre gewiß größer ist, als das Product aus der ganzen Masse der Röhre in das Quadrat des Halbmessers x, und kleiner, als das Product aus ihr in das Quadrat des Halbmessers $x + \Delta x$.

4. Es ist aber πx^2 der Quadratinhalt des Kreises gha, und $\pi(x+\Delta x)^2 = \pi x^2 + \pi(2x+\Delta x)\Delta x$ der des Kreises ebf; daher ist $\pi(2x+\Delta x)\Delta x$ der Quadratinhalt der Krone aghfeb als der Grundfläche der Röhre; folglich ist $a\pi(2x+\Delta x)\Delta x$ der Cubikinhalt, oder die ganze Masse der Röhre. Wegen (3) ist also für jede wie immer kleine Differenz Δx

$$\Delta\mu > a\pi(2x+\Delta x)\Delta x . x^2;$$

$$\Delta\mu < a\pi(2x+\Delta x)\Delta x(x+\Delta x)^2.$$

Daher auch

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > 2a\pi x^3 + a\pi x^2\Delta x.$$

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < 2a\pi x^3 + 5a\pi x^2\Delta x + 4a\pi x\Delta x^2 + a\pi\Delta x^3.$$

Der Exponent des Differentialverhältnisses des Moments der Trägheit μ des auf der unbestimmten Grundfläche gah stehenden Cylinders ist also nach (69. §.) $d\mu = 2a\pi x^3 dx$, und daraus erhält man $\mu = \frac{2}{4}a\pi x^4 + Const$: weil aber für $Ca = x = 0$ gewiß auch $\mu = 0$ seyn muß; so ist $Const = 0$ (II. Band, 28. §.), folglich $\mu = \frac{1}{2}a\pi x^4$ das Moment des Cylinders auf der Grundfläche gah. Setzt man

man $x=CA=R$; so findet man daraus das Moment der Trägheit des auf der Grundfläche ABD stehenden Cylinders $\mu=\frac{1}{2}a\pi R^4=\frac{1}{2}a\pi R^2 . R^2=\frac{1}{2}PR^2$, wenn P des Cylinders Masse bedeutet (1).

220. §.

Zusatz. Hieraus (219. §.) nach (209. §.) findet man das Moment der Trägheit eines hohlen Cylinders auf der Grundfläche aghDBA, wenn die Halbmesser $CA=R$, $Ca=r$, nebst des Cylinders Axe a bekannt sind: denn wenn der ganze Cylinder voll wäre; so wäre sein Moment der Trägheit $=\frac{1}{2}a\pi R^4$; daher weil zur Ausfüllung desselben ein Cylinder auf der Grundfläche agh erfordert wird, dessen Moment ist $\frac{1}{2}a\pi r^4$; so ist des hohlen Cylinders Moment $=\frac{1}{2}a\pi R^4-\frac{1}{2}a\pi r^4=\frac{1}{2}a\pi(R^2-r^2)(R^2+r^2)$ $=\frac{1}{2}P(R^2+r^2)$, wenn P die Masse des hohlen Cylinders bedeutet.

221. §.

15. Fig. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit einer Kugel ADBE (15. Fig.) in Ansehung ihres Durchmessers AB zu bestimmen.

Auflösung. 1. der Durchmesser sey $AB=2r$; so ist, für das Verhältniß $1:\pi$ des Halbmessers zur halben Peripherie, der Cubikinhalt oder die Masse der ganzen Kugel $\frac{4}{3}\pi r^3$.

2. Ein unbestimmtes Stück des Durchmessers sey $AP=x$, und durch P denke man sich den kreisförmigen auf den Durchmesser AB senkrecht stehenden Durchschnitt ah, dessen Halbmesser ist $aP=\sqrt{(2rx-x^2)}$.

3. Bey

3. Bey dieser Voraussetzung ist aAh ein unbestimmter von AP $= x$ abhängiger Kugelabschnitt, dessen Moment der Trägheit μ in Ansehung des Durchmessers AB gewiß eine Function von x ist: wächst $x = AP$ um die Differenz $Pp = \Delta x$; so übergeht, für den zu ah parallelen Durchschnitt df, der Kugelabschnitt aAh in den Abschnitt dAf, der Abschnitt aAh wächst um das zwischen den Durchschnitten ah, df enthaltene Kugelstück dahf, und das Moment der Trägheit μ des Abschnittes aAh wächst um das Moment der Trägheit des Kugelstückes dahf, welches demnach $= \Delta\mu$ ist.

4. Nun aber ist einleuchtend, daß wenn man sich auf der Grundfläche ah den Cylinder abgh, und auf der Grundfläche df den Cylinder cdfe vorstellt, das Moment der Trägheit $\Delta\mu$ des Kugelstücks adfh in Ansehung des Durchmessers AB größer ist, als das Moment der Trägheit des Cylinders cdfe, und zugleich kleiner als das des Cylinders abgh in Ansehung desselben Durchmessers: da also $\sqrt{(2rx - x^2)}$ in (2), und $\sqrt{(2r(x+\Delta x) - (x+\Delta x)^2)}$ die Halbmesser der Durchschnitte ah, df sind; so hat man wegen (219. §.)

$$\Delta\mu > \tfrac{1}{2}\pi(2r(x+\Delta x) - (x+\Delta x)^2)^2\Delta x,$$
$$\Delta\mu < \tfrac{1}{2}\pi(2rx - x^2)^2\Delta x.$$

Also auch

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\pi(2rx - x^2)^2 + \tfrac{1}{2}\pi(2(r-x)\Delta x - \Delta x^2)^2 \\ + \pi(2rx - x^2)(2(r-x)\Delta x - \Delta x^2) \end{array}$$
$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < \tfrac{1}{2}\pi(2rx - x^2)^2.$$

Nach (69. §.) erhält man hieraus

$$d\mu = \tfrac{1}{2}\pi(2rx - x^2)^2 dx.$$

Integrirt man diese Formul, und setzt man $x = AB = 2r$; so erhält man das Moment der ganzen Kugel $\mu = \frac{8}{15}\pi r^5 = \frac{2}{5} Pr^2$, wobey P die Masse der ganzen Kugel bedeutet (1).

222. §.

16. Fig. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines rechtwinklichten Parallelograms ABCD (16. Fig.) bey der Voraussetzung zu bestimmen, daß dasselbe mit der zwischen den aus seinen Eckpuncten D, A auf die Umdrehungsaxe MN herabgelassenen einander gleichen Senkstrichen $Dd = Aa$ eingeschlossenen Ebene DdaA unter einem rechten Winkel CDd verbunden ist.

Auflösung. Für $DP = x$, und $PQ = \Delta x$, wenn man die Parallelen Pp, Qq zu DA ziehet, ist DApP ein unbestimmtes Stück des ganzen Parallelograms, und PpqQ ist seine Differenz: das Moment der Trägheit μ von PpAD in Ansehung der Axe MN ist eine Function von $x = DP$, und ihre Differenz $\Delta\mu$ ist das Moment von QPpq. Da nun alle zwischen Qq und Pp enthaltenen Bestandtheilchen der Masse QqpP in einer größeren Entfernung von der Umdrehungsaxe MN liegen, als Pd ist, und zugleich in einer kleineren Entfernung, als Qd ist; so erhellet aus (207. §.), daß das Moment der Trägheit $\Delta\mu$ von PpqQ größer seyn muß, als das Product aus der ganzen Masse $PpqQ = DA . QP$ in $Pd^2 = PD^2 + Dd^2$, und zugleich kleiner, als das Product aus ihr in $Qd^2 = QD^2 + Dd^2$. Für jede wie immer kleine Differenz ist demnach

$\Delta\mu$

$\Delta\mu > DA.\Delta x(x^2+Dd^2)$;

$\Delta\mu < DA.\Delta x((x+\Delta x)^2+Dd^2)$.

Daher auch

$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > DA(x^2+Dd^2)$;

$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < DA(x^2+Dd^2)+2\,DA.x\Delta x+DA\Delta x^2$.

Nach (69. §.) ist also

$d\mu = DA(x^2+Dd^2)\,dx$.

Das Integral hievon ist $\mu = DA(\frac{1}{3}x^3+x.Dd^2)$; setzt man daher $x = DP = DC$; so erhält man des ganzen Parallelograms ABCD Moment der Trägheit $= DA(\frac{1}{3}DC^3 + DC.Dd^2) = \frac{1}{3}DA.DC^3 + DA.DC.Dd^2$.

223. §.

Aufgabe. Ein rechtwinklichtes gerades Prisma 17.
ABEFCDΔHG wird um die mit seiner Eckseite EF Fig.
zusammenfallende feste Axe MN bewegt; man soll das Moment der Trägheit desselben in Ansehung dieser Axe bestimmen.

Auflösung. 1. Sey $CF = h$, $CB = b$, $CD = l$. Man nehme $Fa = x$, und denke sich den zu ABCD parallelen Durchschnitt afhd; so ist das Moment der Trägheit μ von afhdGHEF in Ansehung der Axe MN eine Function von $x = Fa$, welche, wenn $x = Fa$ um $ab = \Delta x$ wächst, um die Differenz $\Delta\mu$, dem Momente der Trägheit der zwischen den zu ABCD parallelen Durchschnitten afhd, bege enthaltenen Masse gleich, zunimmt. Nun sind die Bestandtheilchen dieser Masse dergestalt vertheilt, daß, wenn man

man sich bey ihr lauter zu ABCD parallele Schnitte denkt, die Momente der Trägheit dieser einzelnen Schnitte in Ansehung der Umdrehungsaxe MN um so größer sind, je weiter sie von afhd abstehen, ob gleich die Schnitte selbst alle einander gleich seyn müssen (207. §.): nähme man daher an, daß u, v solche Linien sind, wofür die Schnitte afhd, begc mit ihren Quadraten u^2, v^2 multiplicirt die Momente der Trägheit derselben Schnitte in Ansehung der Umdrehungsaxe MN zu Producten $afhd.u^2$, $begc.v^2$ geben würden; so müßte die ganze Masse afhdcgeb mit dem Quadrate einer größern Linie, als u, und einer kleinern als v multiplicirt werden, wenn das Product ihrem Moment der Trägheit $\Delta\mu$ gleich seyn sollte: also ist allemal

$$\Delta\mu > afhdcgeb.u^2;$$
$$\Delta\mu < afhdcgeb.v^2.$$

2. Es ist aber des Schnitts afhd Moment der Trägheit in Ansehung der Axe MN nach (222. §.) $= \frac{1}{3} CB.CD^3 + CB.CD.Fa^2 = \frac{1}{3} bl^3 + blx^2$, und des Schnitts ebcg seines $= \frac{1}{3} CB.CD^3 + CB.CD.Fb^2 = \frac{1}{3} bl^3 + bl(x+\Delta x)^2$: also ist in (1), $u^2 = \frac{1}{3} l^2 + x^2$, und $v^2 = \frac{1}{3} l^2 + (x+\Delta x)^2$. Es ist ferner die Masse afhdcgeb $= ad.af.ab = bl\Delta x$; wegen (1) ist demnach für jede Differenz Δx.

$$\Delta\mu > bl\Delta x(\tfrac{1}{3} l^2 + x^2);$$
$$\Delta\mu < bl\Delta x(\tfrac{1}{3} l^2 + (x+\Delta x)^2).$$

Demnach auch

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > bl(\tfrac{1}{3} l^2 + x^2);$$
$$\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < bl(\tfrac{1}{3} l^2 + x^2) + 2blx\Delta x + bl\Delta x^2.$$

Nach

Nach (69. §.) folgt hieraus

$d\mu = bl(\frac{1}{3}l^2 + x^2)\,dx$, und nun

$\mu = bl(\frac{1}{3}l^2.x + \frac{1}{3}x^3)$.

Setzt man $x = Fa = FC = h$; so erhält man des ganzen Prisma BG Moment $= bl(\frac{1}{3}hl^2 + \frac{1}{3}h^3) = \frac{1}{3}bhl(l^2 + h^2) = \frac{1}{3}P(l^2 + h^2)$, für die Masse P desselben.

224. §.

Von der Berechnung des Moments der Trägheit derjenigen Körper, welche beym Maschinenbau am häufigsten vorkommen, habe ich in einem im Jahr 1789 herausgegebenen Versuch eines Beytrags zur allgemeinen Theorie von der Bewegung und vortheilhaftesten Einrichtung der Maschinen, ausführlich gehandelt: nun kann man die Sprache, deren ich mich daselbst bedient habe, nach der hier entworfenen Theorie leicht berichtigen. Ich will noch zeigen, wie sich die vorhergehenden Untersuchungen auf den Fall veränderlicher Kräfte anwenden lassen, überhaupt, und insbesondere beym einfachen und zusammengesetzten Pendul.

225. §.

Aufgabe. Die Axe ist bestimmt, um welche eine Masse P, deren Lage gegen jene Axe ebenfalls bestimmt ist, dergestalt, daß sie während der Bewegung nicht geändert werden kann, sich herumbewegen läßt: diese Bewegung soll nun durch eine veränderliche Kraft U bewirkt werden, welche auf einen mit jener Masse in Verbindung stehenden Punct A, dessen senkrechte Entfernung von der gegebenen

Axe

Axe D seyn mag, beständig nach der Richtung der Tangente desjenigen Kreises wirken soll, welchen der Punct A während der Bewegung um jene Axe durchläuft. Man sucht die wahre und Winkel-Geschwindigkeit des Puncts A.

Auflösung. 1. Das Moment der Trägheit der Masse P in Ansehung der gegebenen Bewegungsaxe sey Pk^2 (214. §.). Wirkte nun auf den Punct A was immer für eine unveränderliche Kraft W; so würde die Winkelgeschwindigkeit des Puncts A dieselbe bleiben, wenn man sich, statt jener Masse P, die gleichgültige $= \frac{Pk^2}{D^2}$ am Puncte A dächte (213. §.): also wäre am Ende jeder Zeit t die Winkelgeschwindigkeit desselben Puncts

$$= \frac{2gW}{\frac{P.k^2}{D^2}.D}.t = \frac{2gDW}{Pk^2}t \text{ (200. §.).}$$

2. Nun kann man, wegen (194. §.), vollkommen wie in (189. §.) schließen. Auf den Punct A soll nämlich eine veränderliche Kraft U wirken: gesetzt, binnen der Zeit T sey dieselbe in V übergegangen, und eine Winkelgeschwindigkeit γ erzeugt, welche binnen einem darauf folgenden Zeittheilchen ΔT um $\Delta\gamma$ zunehmen mag. Ist die Kraft U abnehmend; so muß sie binnen der Zeit ΔT um ΔV abnehmen, mithin $= V - \Delta V$ am Ende der Zeit ΔT seyn: die binnen der Zeit ΔT wirklich erzeugte Winkelgeschwindigkeit $\Delta\gamma$ ist also größer, als die, welche binnen derselben Zeit eine unveränderliche Kraft $= V - \Delta V$ erzeugen würde,

und zugleich kleiner, als welche eine unveränderliche Kraft $=V$ erzeugen müßte. Also ist nach (1)

$$\Delta\gamma > \frac{2gD}{Pk^2}(V - \Delta V)\Delta T;\ \Delta\gamma < \frac{2gD}{Pk^2} V\Delta T.$$

Für eine zunehmende Kraft U, welche binnen der Zeit T in V übergehen soll, fände man

$$\Delta\gamma < \frac{2gD}{Pk^2}(V + \Delta V)\Delta T;\ \Delta\gamma > \frac{2gD}{Pk^2} V\Delta T.$$

Da also die Kraft V als eine Function von T kann betrachtet werden, deren Differenz sich durch $\Delta V = \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \text{etc.}$ ausdrücken läßt (59. §.); so hat man für jede wie immer kleine Differenz der Zeit T

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta T} > \frac{2gD}{Pk^2} V - \frac{2gD}{Pk^2}(\alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \text{etc.}),$$

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta T} < \frac{2gDV}{Pk^2}.$$

Oder

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta T} < \frac{2gD}{Pk^2} V + \frac{2gD}{Pk^2}(\alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \text{etc.})$$

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta T} > \frac{2gD}{Pk^2} V.$$

In beyden Fällen ist daher der Exponent des Differentialverhältnisses der binnen der Zeit T erzeugten Winkelgeschwindigkeit γ nach (69. §.)

$$d\gamma = \frac{2gD}{Pk^2} V dT.$$

Und wenn man nun annimmt, C sey die wahre Geschwindigkeit des Puncts A am Ende der Zeit T; so ist $C = \gamma . D$ (199. §.), daher $dC = D d\gamma$, oder

$$dC = \frac{2gD^2}{Pk^2} V dT.$$

226. §.

Zusatz. In (225. §. Auflös. n. 1.) war $\frac{Pk^2}{D^2}$ die gleichgültige Masse; setzt man sie $= M$; so ist in (125. §.) $dC = \frac{2gV}{M} dT$. Eine veränderliche Kraft mag daher was immer für eine Masse P um eine gegebene Axe zu bewegen haben; so wird sie die Bewegung des Puncts A, auf den sie unmittelbar wirkt, eben so beschleunigen, als wenn sie nach geradlinichter Richtung eine Masse M zu bewegen hätte (189. §.), welche am Puncte A der Masse P gleichgültig ist (213. §.).

227. §.

Auf dieser Formul (226. §.) beruhet jede vollkommene Theorie, welche zur Beurtheilung der Bewegung einer Maschine dienen sollte: bey der Anwendung auf die in der Natur wirklich vorhandenen Kräfte stehen aber so viele und so große Hindernisse im Wege, daß fast keine Hoffnung ist, sie auf irgend eine Art zu übersteigen. Soll eine Maschine von was immer für einer veränderlichen Kraft in Bewegung gesetzt und unterhalten werden, welche vom ersten Augenblicke der Bewegung an, binnen einer Zeit T die Größe V erlangen mag; so entsteht die wichtige Frage, wie groß ist die Geschwindigkeit C, welche der Punct, worauf die Kraft

unmit-

unmittelbar wirkt, in der Zeit T erlangen muß? Nimmt man an, F bedeute diejenige Kraft, welche an demselben Puncte zum Gleichgewichte mit dem gesammten, bey der zu bewegenden Maschine vorhandenen Widerstand erfordert wird, und M sey die an eben dem Puncte allen zu bewegenden Massen zusammengenommen zugehörige gleichgültige Masse, in der Bedeutung (213. §.): so ist $dC = \frac{2g(V-F)dT}{M}$. Bey der Bestimmung der Geschwindigkeit C kömmt also alles darauf an, daß man F und M genau genug zu berechnen im Stande sey, und die Gesetze kenne, nach welchen die bewegenden, und vielleicht auch die widerstehenden, Kräfte sich während der Bewegung ändern.

228. §.

Aufgabe. Eine gerade um ihren festen Endpunct C bewegliche unbiegsame Linie AC (18. Fig.) wird von einer auf A beständig nach verticaler Richtung unterwärts wirkenden unveränderlichen Kraft P getrieben; am Puncte A aber befindet sich eine, bloß träge, Masse M; man soll die Bewegung des andern Endpuncts A bestimmen, wenn der Winkel ACE $= \phi$, welchen die Linie AC mit der verticalen Linie EC im Anfange der Bewegung einschließt, bekannt ist. 18. Fig.

Auflösung. 1. Man nehme an, die Linie AC sey binnen einer Zeit t um den Winkel ACD $= \alpha$ vorgerückt, und setze DCE $= \phi - \alpha = \beta$; so giebt der Bogen AD $= \mu$ den Weg, welchen der Punct A in der Zeit t zurückgelegt

hat, und c sey die Geschwindigkeit, welche er binnen derselben Zeit erlangen mag.

2. Die Linie selbst sey AC = a: da nun durch φ, α, β, in (1) drey aus C mit dem Halbmesser = 1 zwischen den Schenkeln AC und CE, AC und CD, DC und CE beschriebene Kreisbogen können verstanden werden (198. §.); so ist in (1) $\mu : \alpha = a : 1$, daher $\mu = a\alpha = a(\varphi - \beta)$.

3. Weil ferner CE vertical ist, wenn aus C der Bogen AEB beschrieben, und AP horizontal, daher auf CE senkrecht gezogen wird; so ist $CP = AC . \text{Cos} ACE = a \text{Cos}\varphi$ wegen (1) 2). Demnach ist $PE = CE - CP = a - a\text{Cos}\varphi = a(1 - \text{Cos}\varphi) = a \text{Sin v}\varphi$, und wir wollen setzen $PE = a \text{Sin v}\varphi = b$.

4. Sobald nun die Linie AC in die Lage DC kömmt, wird der Punct D, vermöge der Voraussetzung, von der unveränderlichen Kraft P nach der zu CE parallelen, in sich verticalen, Richtung Db fortgetrieben: wenn man aber an D die auf DC senkrechte Tangente uv ziehet, sodann CD in a verlängert, und ba parallel zu uv, bc aber parallel zu Ca ziehet; so läßt sich die Kraft P = Db in zwo Seitenkräfte $Da = P \text{Cos} DCE$, und $Dc = P \text{Sin} DCE = P\text{Sin}\beta$ zerlegen, worunter die erste vom Puncte C ganz aufgehoben wird, die zweyte aber den Punct D nach der auf DC senkrechten Richtung Dv zur Fortsetzung der Bewegung im Bogen DE antreibt.

5. Da also am Puncte D sich eine Masse M befinden soll; so erhält man aus (1) 4) nach (226. §.).

$$dc = \frac{2gP\,\text{Sin}\,\beta}{M} dt.$$

Es ist aber $d\mu = cdt$ (171. §.) wegen (1);

$$\text{daher } cdc = \frac{2gP \operatorname{Sin}\beta}{M} d\mu.$$

6. Nun war in (2) $\mu = a(\varphi - \beta)$; daher ist $d\mu = -ad\beta = \frac{ad \operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Sin}\beta}$ (77. §.): in (5) ist also auch

$$cdc = \frac{2gP . ad \operatorname{Cos}\beta}{M}. \text{ Mithin}$$

$$\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{2agP}{M} \operatorname{Cos}\beta, \text{ und}$$

$$c^2 = \frac{4agP}{M} \operatorname{Cos}\beta + C.$$

Die Constante C zu finden, erwäge man, daß im Anfange der Bewegung die Geschwindigkeit $c = 0$ war, daß demnach für $\beta = DCE = ACE = \varphi$ gewiß $c = 0$ seyn muß: also ist nach (II. Band. 28. §.)

$$\frac{4agP}{M} \operatorname{Cos}\varphi + C = 0;\ C = -\frac{4agP}{M} \operatorname{Cos}\varphi:$$

$$\text{Folglich } c^2 = \frac{4agP}{M}(\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\varphi), \text{ und}$$

$$c = 2\sqrt{\frac{agP}{M}(\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\varphi)} = 2\sqrt{\frac{agP}{M}(\operatorname{Cos}(\varphi - \alpha) - \operatorname{Cos}\varphi)}.$$

7. Will man nun auch die Zeit t in (1) bestimmen; so setze man nach (5) 6)

$$dt = \frac{d\mu}{c} = \frac{-ad\beta}{2\sqrt{\frac{agP}{M}(\operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Cos}\varphi)}}.$$

8. Sey ferner $z = \mathrm{Sin\,v}\beta$, daher $\mathrm{Cos}\beta = 1 - z$, und $\mathrm{Sin}\,\beta = \sqrt{(2z - z^2)}$; nach (II. Band. 22. §. 4. Zus.) aber $dz = d\,\mathrm{Sin\,v}\,\beta = \mathrm{Sin}\,\beta\, d\beta$, mithin $d\beta = \frac{dz}{\sqrt{(2z - z^2)}}$.

9. Aus (7) 8) erhält man demnach für die Zeit t

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{aM}{gP}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(\mathrm{Sin\,v}\,\varphi - z)} \cdot \sqrt{(2z - z^2)}},$$

oder für $\mathrm{Sin\,v}\,\varphi = \frac{b}{a}$ in (3)

$$dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(2-z)^{-\frac{1}{2}} \cdot dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a} - z\right)}}.$$

10. Nach (I. Band. 76. §. 7. Zusatz) findet man

$$(2-z)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1 \cdot z^1}{2^{\frac{3}{2}} \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3 z^2}{2^{\frac{5}{2}} \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 z^3}{2^{\frac{7}{2}} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} + \text{----}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2r - 1) z^r}{2^{\frac{2r+1}{2}} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots 2r}.$$ Für

$$K = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2r - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots 2r}$$

erhält man daher für dt folgenden Ausdruck:

$$dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dz}{2^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a} - z\right)}}\right.$$

$$\left. + \frac{K}{2^{\frac{2r+1}{2}}} \cdot \frac{z^r \cdot dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a} - z\right)}}\right),$$

wobey das zweyte Glied zwischen den Klammern eigentlich das unbestimmte rte Glied einer Reihe ist, deren einzelne

Glieder daraus entstehen würden, wenn man $r=1$, $r=2$, $r=3$, u. s. f. nach und nach setzte. Die Zeit t selbst ist nun:

$$t = -\frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\int\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}}\right.$$

$$\left.+\frac{K}{2^{\frac{2r+1}{2}}}\int\frac{z^{\frac{2r-1}{2}}dz}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}}\right).$$

11. Diese Integralien auf die unzweydeutigste Art zu bestimmen, setze man $u=\frac{2za}{b}$, daher $z=\frac{bu}{2a}$; $dz=\frac{bdu}{2a}$ also:

$$\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}}=\frac{du}{\sqrt{(2u-u^2)}}.$$

Das Integral hievon ist demnach wegen (II. Band. 24, 22. §. 5. Zus.) $=\text{Arc Sin v}\,u=\text{Arc Sin v}\frac{2az}{b}$, nämlich

$$\int\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}}=\text{Arc Sin v}\frac{2az}{b}..$$

12. Durch dieses Integral erhält man ferner nach (II. Band. 41. §. 2. Zus. 1. Form.)

$$\int\frac{z^{\frac{2r-1}{2}}dz}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}}=-2\left(\frac{z^{\frac{2r-1}{2}}}{2r}+\frac{(2r-1)bz^{\frac{2r-3}{2}}}{2r(2r-2)a}\right.$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)b^2z^{\frac{2r-5}{2}}}{2r(2r-2)(2r-4)a^2}+------$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots.5.3\,b^{r-1}.z^{\frac{1}{2}}}{2r(2r-2)----4.2\,a^{r-1}}\Big)\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)---3.1.b^{r}}{2r(2r-2)---4.2.a^{r}}\,\mathrm{Arc\,Sin\,v}\,\frac{2az}{b}.$$

13. Durch (12) für den Werth von K in (10) findet man daher aus (10)

$$t=-\frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arc\,Sin\,v}\frac{2az}{b}-\frac{2K}{2^{\frac{2r+1}{2}}}\left(\frac{z^{\frac{2r-1}{2}}}{2r}\right.\right.$$

$$+\frac{(2r-1)bz^{\frac{2r-3}{2}}}{2r(2r-2)a}$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)b^{2}z^{\frac{2r-5}{2}}}{2r(2r-2)(2r-4)a^{2}}+------$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)---5.3\,b^{r-1}.z^{\frac{1}{2}}}{2r(2r-2)---4.2\,a^{r-1}}\Big)\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}$$

$$\left.+\frac{K^{2}}{2^{\frac{2r+1}{2}}}.\frac{b^{r}}{a^{r}}.\ \mathrm{Arc\,Sin\,v}\frac{2az}{b}\right)+C,$$

Weil ferner im Puncte A der Anfang der Bewegung war, mithin $t=0$ für $DCE=ECA$, oder $\beta=\varphi$ seyn muß; so ist $t=0$ für $z=\mathrm{Sin\,v}\,\beta=\mathrm{Sin\,v}\,\varphi=\frac{b}{a}$ wegen (8) 3): da also dafür $\sqrt{\left(\frac{b}{a}-z\right)}=0$, und $\mathrm{Arc\,Sin\,v}\,\frac{2az}{b}=\mathrm{Arc\,Sin\,v}\,2=\pi$ wird, wenn π die halbe Peripherie des mit dem Halbmesser $=1$ beschriebenen Kreises bedeutet; so ist nach (II. Band. 28. §.) die Constante

$$C=\frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}}.\pi\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{K^{2}}{2^{\frac{2r+1}{2}}}\,\frac{b^{r}}{a^{r}}\right).$$

14. Soll die Masse M im Bogen AE bis zur verticalen Linie CE fortgetrieben werden; so wird sie in E eine Geschwindigkeit c haben, welche man aus (6) für $\beta = DCE = o$, daher $\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Cos}\,\varphi = 1 - \mathrm{Cos}\,\varphi = \mathrm{Sin\,v}\,\varphi = \frac{b}{a}$ in (3) erhält; sie ist nämlich:

$$c = 2\sqrt{\frac{bgP}{M}} = 2\sqrt{\frac{agP}{M}}\,\mathrm{Sin\,v}\,\varphi.$$

15. Und will man die Zeit wissen, binnen welcher dieselbe Masse den Bogen AE durchläuft; so muß man in (13) $z = \mathrm{Sin\,v}\,\beta = \mathrm{Sin\,v\,DCE} = \mathrm{Sin\,v}\,o = o$ setzen, wofür entstehet

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{aM}{gP}\right)^{\frac{1}{2}}.\pi\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{K^2}{2^{\frac{2r+1}{2}}}.\frac{b^r}{a^r}\right),$$

oder $t + \frac{\pi}{2}\left(\frac{aM}{2gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{K^2.b^r}{(2a)^r}\right)$, oder (10)

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{aM}{2gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \left(\frac{1.3.5\ldots.(2r-1)}{2.4.6\ldots.2r}\right)^2.\left(\frac{b}{2a}\right)^r\right),$$

oder auch wegen (3)

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{aM}{2gP}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots2r}\right)^2.\left(\frac{\mathrm{Sin\,v}\,\varphi}{2}\right)^r..$$

Wobey das zweyte Glied eigentlich das rte Glied einer Reihe ist, deren einzelne Glieder man daraus für r = 1, r = 2, r = 3, u. s. f. erhalten würde, wegen (10).

229. §.

Erklärung. Eine gerade unbiegsame Linie CE, an 18.
deren Endpuncte E sich ein schwerer Punct, dessen Gewicht Fig.
und die ihm proportionale Masse wir P nennen wollen, be-

finden mag, heißt ein einfaches Pendul, wenn sie am andern Endpuncte C dergestalt befestigt ist, daß sie sich um C frey bewegen läßt.

230. §.

1. Zusatz. Wird das Pendul frey in der verticalen Lage CE an C angehängt; so wird der Punct E vom Gewichte P unterwärts nach der verticalen Richtung CE gedrückt (229. §.): da also diesen ganzen Druck der feste Punct C aushält; so ist keine Kraft da, welche das Pendul EC um C bewegte. Das Pendul CE wird also ruhen, bis eine äußere Kraft diese Ruhe stört.

231. §.

2. Zusatz. Wird hingegen das Pendul CE von seiner verticalen Lage entfernt, etwa in die Lage CA unter einem Erhöhungswinkel $ACE = \varphi$ gebracht; so wird der Punct A des Penduls CA von seinem Gewichte P (229. §.) unterwärts nach verticaler, mithin zu CE paralleler Richtung gedrückt: das Pendul wird also sich um C bewegen müssen; sein Endpunct A wird in einer gewissen Zeit t durch einen Kreisbogen AD fallen, und in D, wenn man den Winkel $ACD = \alpha$ setzt, die Geschwindigkeit

$$c = 2\sqrt{ag(\mathrm{Cos}(\varphi - \alpha) - \mathrm{Cos}\,\varphi)}$$

erlangen (228. §. n. 6.). Je tiefer das Pendul gegen E fällt, desto größer ist der Winkel α, und desto kleiner der Winkel $\varphi - \alpha = DCE$, mithin desto größer $\mathrm{Cos}(\varphi - \alpha)$, folglich auch die Geschwindigkeit c desto größer: kömmt das Pendul in die verticale Lage CE; so ist $\alpha = ACD = ACE = \varphi$, mithin $\mathrm{Cos}(\varphi - \alpha) = \mathrm{Cos}\,0 = 1$; und die

die Geschwindigkeit $c = 2\sqrt{ag(1 - \text{Cos}\,\varphi)} = 2\sqrt{ag\,\text{Sin v}\,\varphi}$ $= 2\sqrt{g.\text{PE}}$ (228. §. n. 3.). Mit dieser Geschwindigkeit wird das Pendul seine Bewegung um C, von der verticalen Lage CE an, auf der entgegengesetzten Seite EB fortsetzen: weil aber nun der Winkel $\alpha = \text{ACD}$ größer ist als φ; so wird zwar $\varphi - \alpha$ verneint, aber $\text{Cos}(\varphi - \alpha)$ bejaht, mithin die Geschwindigkeit c des Penduls, zwar noch immer möglich, aber nun kleiner seyn, als sie in E war, und um desto kleiner, je größer der Winkel α ist, je weiter demnach das Pendul gegen B fortrückt. Kömmt das Pendul in CB, so daß $\alpha = \text{ACD}$ in $\alpha = \text{ACB} = 2\text{ACE} = 2\varphi$ übergehet; so ist seine Geschwindigkeit in B gleich Null, nämlich $c = 2\sqrt{ag\,(\text{Cos}\,(\varphi - 2\varphi) - \text{Cos}\,\varphi)} = 2\sqrt{ag\,(\text{Cos}\,(-\varphi) - \text{Cos}\,\varphi)} = 2\sqrt{ag(\text{Cos}\,\varphi - \text{Cos}\,\varphi)} = 0$.

232. §.

3. Zusatz. Wenn also ein einfaches Pendul (229. §.) unter was immer für einem Erhöhungswinkel $\text{ACE} = \varphi$ von der verticalen Lage CE in CA aufgehoben, sodann freygelassen wird; so muß dasselbe mit allmählich wachsender Geschwindigkeit bis zur verticalen Lage CE fallen, hernach mit abnehmender Geschwindigkeit auf der entgegengesetzten Seite durch einen Bogen EB = EA steigen; von da kehrt das Pendul durch denselben Bogen BEA auf gleiche Art in die vorige Lage CA zurück, das heißt: das Pendul muß sich um den Punct C unaufhörlich in einem Kreisbogen AEB, welchen die verticale Linie CE in E halbirt, schwingen, wenn nichts da ist, was diese Schwungbewegung störte, und zwar so, daß die Geschwindigkeit des an ihm hängenden

 schweren

schweren Punctes (229. §.), so oft er in E sich befindet, derjenigen Geschwindigkeit $2\sqrt{g.PE}$ gleich ist, welche derselbe Punct beym freyen Fall durch die Höhe PE erlangen würde (231. 178. 177. §.).

233. §.

4. Zusatz. Für den bekannten Erhöhungswinkel $\varphi = ACE$, und $PE = b = a \operatorname{Sin} v \varphi$, wobey $a = CA$ die Länge des Penduls bedeutet, findet man die Zeit t des halben Schwunges im Bogen AE aus (228. §. n. 15.), wenn man, wegen (229. §.), $P = M$ setzt: und wenn man dieselbe Zeit mit 2 multiplicirt; so erhält man die Zeit t des ganzen Schwunges im Bogen AEB (232. §.), nämlich:

$$t = \pi\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \left(\frac{1.3.5 \text{----} (2r-1)}{2.4.6 \text{----} 2r}\right)^2 . \left(\frac{\operatorname{Sin} v \varphi}{2}\right)^r\right)$$

$$= \pi\left(\frac{a}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \left(\frac{1.3.5 \text{----} (2r-1)}{2.4.6 \text{----} 2r}\right)^2 . \left(\frac{b}{2a}\right)^r\right),$$

wobey das zweyte Glied in der bereits bestimmten Bedeutung (228. §. n. 15) muß genommen werden.

234. §.

5. Zusatz. Die Zeit t eines Schwunges im Bogen AEB ist demnach desto kleiner, je kleiner ist der Erhöhungswinkel $ACE = \varphi$, je kleiner demnach der Bogen AEB, in welchem das Pendul sich bewegt, und je kleiner damit ist auch $b = PE$ (233. §.): nimmt man an, daß die Schwungbewegung eines einfachen Penduls CE, in einem sehr kleinen Bogen AEB geschehen soll, bey welchem $b = PE$ in Vergleichung mit der Länge $a = CE$ des Penduls sehr klein seyn mag;

mag; so wird, was nach 1 in (233. §.) folgt, unbeträchtlich, mithin, zwar nicht ganz genau, doch sehr nahe, die Zeit eines ganzen Schwunges $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ seyn (233. §.)

235. §.

6. Zusatz. Nach (178. §.) bedeutet g die Beschleunigung der Schwere, nämlich die Höhe, durch welche ein schwerer Körper in der ersten Secunde frey fallen würde; dieselbe läßt sich daher aus $g = \frac{a\pi^2}{2t^2}$ (234. §.) herleiten, wenn man durch Beobachtungen die Zeit t findet, binnen welcher ein einfaches Pendul, von einer bestimmten Länge a seine einzelnen Schwingungen in einem sehr kleinen Kreisbogen vollzieht.

236. §.

7. Zusatz. Für t = 1 Secunde erhält man $a = \frac{2g}{\pi^2}$ (234. §.), welches für die bekannte Beschleunigung g der Schwere, die Länge eines einfachen Secunden-Penduls, nämlich eines solchen Penduls giebt, welches jeden ganzen Schwung in einem sehr kleinen Kreisbogen AEB, binnen einer Zeitsecunde vollziehen würde.

237. §.

8. Zusatz. Wenn an allen Oertern der Erde das einfache Secunden-Pendul einerley Länge a hätte; so würde auch die Beschleunigung g der Schwere überall einerley seyn, nämlich an allen Oertern $g = \frac{1}{2}a\pi^2$ (236. §.), zwar nicht ganz genau, doch sehr nahe, sobald der Schwungbogen sehr klein ist (234. §.); ist aber an verschiedenen Oertern auch

die

die Länge des einfachen Secunden-Penduls verschieden, wie dieses manche Beobachtungen wirklich lehren; so muß auch die Beschleunigung g der Schwere an denselben Oertern verschieden seyn, und die Beschleunigungen der Schwere an verschiedenen Oertern, verhalten sich gegen einander wie die Längen der Secunden-Pendul an denselben Oertern: denn wenn G die Beschleunigung der Schwere an einem Orte, und g an einem andern Orte, L aber die Länge des Secunden-Penduls am ersten, und l am zweyten Orte ist; so hat man $G = \frac{1}{2} L \pi^2$, $g = \frac{1}{2} l \pi^2$; mithin $G : g = L : l$.

238. §.

9. Zusatz. Sind L, l die Längen zweyer Pendul, welche sich in ähnlichen Kreisbogen, unter einerley Erhöhungswinkel $= \varphi$ schwingen, und T, t die Zeiten, in welchen sie ihre einzelnen Schwingungen vollziehen; so ist nach (233. §.), wenn S den zusammengesetzten Factor bedeutet, welcher bey der Formul in (233. §.) vorkömmt,

$$t = \pi S \sqrt{\frac{l}{2g}}; \quad T = \pi S \sqrt{\frac{L}{2g}}:$$

also $t^2 : T^2 = l : L$, und $t : T = \sqrt{l} : \sqrt{L}$.

239. §.

10. Zusatz. Und wenn n die Anzahl der Schwingungen bedeutet, welche das Pendul l binnen der Zeit Z, N aber die Anzahl der Schwingungen anzeigt, welche das Pendul L in derselben Zeit Z vollzieht, die beyden Pendul aber sich in ähnlichen Bogen schwingen; so ist $1 : n = t : Z$, und $1 : N = T : Z$, wenn t, T die Zeiten sind, binnen welchen

die

die Pendul l, L ihre einzelnen Schwingungen vollziehen: also ist $t = \frac{Z}{n}$, $T = \frac{Z}{N}$, mithin (238. §.)

$$\frac{Z}{n} : \frac{Z}{N} = \sqrt{l} : \sqrt{L}, \text{ und } N^2 : n^2 = l : L,$$

oder $N : n = \sqrt{l} : \sqrt{L}$.

240. §.

Erklärung. Das einfache Pendul, wovon bisher die Rede war, kömmt bey wirklicher Anwendung der Mechanik nie vor: wenn man einen Faden CE nimmt, an einem Ende E einen schweren Körper, etwa eine bleyerne Kugel, und das andere Ende selbst an C dergestalt befestiget, daß der Faden samt dem daran hängenden schweren Körper sich um C schwingen kann; so hat man wohl ein Pendul, aber kein einfaches, wie immer auch der Faden zart, und der daran hängende Körper klein ist (229. §.). Ueberhaupt heißt jeder schwere Körper aDBEa (19. Fig.) 19. Fig. ein **zusammengesetztes Pendul**, wenn er an einer horizontalen Axe mn dergestalt befestigt ist, daß er sich um mn frey schwingen kann.

241. §.

1. **Zusatz.** Sey G der Schwerpunct des zusammengesetzten Penduls aDBEa, das Gewicht aber desselben, und die ihm proportionale Masse sey P, und aG = D die senkrechte Entfernung Ga des Schwerpuncts G, von der Umdrehungsaxe mn; so kann man mit Pk^2 das Moment der Trägheit der ganzen Masse aDBEa in Ansehung einer durch ihren Schwerpunct G gehenden, zu mn parallelen Axe be-

zeichnen

zeichnen (214. §.), mithin durch Pk^2+PD^2 das Moment der Trägheit derselben Masse in Ansehung der Axe mn ausdrücken (215. §.): da also der Schwerpunct G vom Gewichte P der ganzen Masse aDBEa so stark unterwärts nach verticaler Richtung gedrückt wird, als wenn dieselbe Masse gar nicht schwer wäre, sondern an G ein Gewicht $=P$ frey hienge; so wird die Schwungbewegung der Masse aDBEa eben so erfolgen, als wenn eine gerade durch ihren Schwerpunct G gehende unbiegsame Linie aB an a befestigt wäre, an G aber eine Masse $=\frac{Pk^2+PD^2}{D^2}=M$ sich befände, und darauf nach verticaler Richtung unterwärts eine Kraft $=P$ wirkte (226. §.).

242. §.

2. Zusatz. Wenn demnach beym zusammengesetzten Pendul aDBEa der Erhöhungswinkel $\beta aG=\phi$ gegeben ist, welchen sein Durchmesser der Schwere $aG=D$ mit der verticalen Linie $a\beta$ einschließen mag, und man annimmt, das Pendul sey bey dieser Erhöhung frey gelassen; so wird der Schwerpunct G binnen einer Zeit T durch den Kreisbogen Gg fallen, und in g eine Geschwindigkeit (241. 228. §. n. 6.)

$$C=2\sqrt{\frac{DgP(\mathrm{Cos}(\phi-\alpha)-\mathrm{Cos}\phi)}{\frac{Pk^2+PD^2}{D^2}}},$$

oder

$$C=2D\sqrt{\frac{gD}{k^2+D^2}(\mathrm{Cos}(\phi-\alpha)-\mathrm{Cos}\phi)}$$

erlangen.

243. §.

3. Zusatz. Aus (242. §.) erhellet, daß die in (231. 232. §.) für ein einfaches Pendul angeführten Schlüsse, auch hier für das zusammengesetzte Pendul gelten: demnach wird sein Schwerpunct G mit allmählich zunehmender Geschwindigkeit C im Kreisbogen GC fallen, und in der verticalen Linie $\alpha\beta$ die größte Geschwindigkeit (242. 228. §. n. 14.)

$$C = 2D\sqrt{\frac{gD}{k^2+D^2}\operatorname{Sin} v\varphi}$$

binnen der Zeit (241. 228. §. n. 15)

$$T = \frac{\pi}{2D}\left(\frac{D(k^2+D^2)}{2g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\left(\frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots 2r}\right)^2.\left(\frac{\operatorname{Sin} v\varphi}{2}\right)^r\right)$$

erlangen, hierauf auf der entgegengesetzten Seite der verticalen Linie $\alpha\beta$ mit allmählich abnehmender Geschwindigkeit durch einen dem vorigen GC gleichen Kreisbogen steigen, sodann zurückkehren, und sich so um die Axe mn unaufhörlich schwingen, wenn nichts seine Bewegung stört.

244. §.

4. Zusatz. Denkt man sich außer diesem zusammengesetzten Pendul aDBEa ein einfaches Pendul von der Länge l, welches in der Zeit t einen ganzen Schwung vollziehen mag, und nimmt man an, der Erhöhungswinkel dieses Penduls sey dem Erhöhungswinkel $\varphi = \beta a G$ des zusammengesetzten gleich; so ist nach (243. 233. §.)

$$T : t = \frac{1}{D}\left(\frac{D(k^2+D^2)}{2g}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{l}{2g}\right)^{\frac{1}{2}},$$

oder

oder auch

$$T:t = \left(\frac{k^2+D^2}{D}\right)^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}}.$$

und $$T^2:t^2 = \left(\frac{k^2}{D}+D\right):l.$$

245. §.

5. Zusatz. Wäre $D = aG = l$; so wäre $\frac{k^2}{D} + D > l$, mithin $T^2 > t^2$, und $T > t$, das heißt: die Zeit T eines ganzen Schwunges des zusammengesetzten Penduls aDBEa ist größer, als die Zeit, in welcher ein einfaches Pendul, bey einerley Erhöhungswinkel einen ganzen Schwung vollziehen würde, wenn seine Länge der Entfernung des Schwerpuncts G des zusammengesetzten Penduls von der Umdrehungsaxe mn gleich wäre.

246. §.

6. Zusatz. Denkt man sich aber ein einfaches Pendul, dessen Länge $l = \frac{k^2}{D} + D$ seyn mag; so ist auch $T^2 = t^2$, und $T = t$ (244. §.), das heißt: das zusammengesetzte Pendul aDBEa und ein einfaches Pendul von der Länge $l = \frac{k^2}{D} + D$ würden bey einerley Erhöhungswinkel ihre einzelnen Schwingungen in einerley Zeit vollziehen. Da also $\frac{k^2}{D} + D$ eine mögliche gerade Linie ist $= \frac{k^2}{aG} + aG$; so ist klar, daß man sich für jedes zusammengesetzte Pendul aDBEa ein einfaches Pendul (229. §.) von der Länge $az = aG + \frac{k^2}{aG}$ denken kann, welches bey einerley

Erhö-

Erhöhungswinkel $\beta \alpha B$ in eben der Zeit seine einzelnen Schwingungen vollziehen würde, in welcher sie das zusammengesetzte vollzieht; man müßte sich nämlich im Puncte z die ganze durch den Raum a D B E a verbreitete Masse des zusammengesetzten Penduls beysammen denken.

247. §.

Erklärung. Der Punct z auf dem Durchmesser der Schwere a B eines zusammengesetzten Penduls a D B E a, der die Eigenschaft hat, daß, wenn die gesammte Masse des zusammengesetzten Penduls in demselben Puncte vereinigt wäre, man dadurch ein einfaches Pendul az (229. §.) erhielte, welches bey einerley Erhöhungswinkel β a B jeden ganzen Schwung um den Punct a in eben der Zeit vollziehen würde, in welcher er vom zusammengesetzten Pendul aDBEa vollgezogen wird (246. §.), heißt der **Mittelpunct des Schwunges.**

248. §.

Zusatz. Die Entfernung az des Mittelpuncts des Schwunges eines zusammengesetzten Penduls aDBEa von der Schwungaxe mn giebt die Länge eines einfachen Penduls, welches bey einerley Erhöhungswinkel mit jenem einzelne Schwingungen in gleichen Zeiten vollziehen würde (247. §.), und man findet sie, sobald das Moment der Trägheit, etwa μ, des zusammengesetzten Penduls aDBEa in Ansehung der horizontalen Schwungaxe mn, nebst der Entfernung D = aG des Schwerpuncts G von der Schwungaxe mn bekannt ist, wenn man das **Moment der Trägheit** μ **durch das statische Moment** P . D dividirt.

Denn es war $az = D + \frac{k^2}{D}$ (246. §.), und Pk^2 das Moment der Trägheit in Ansehung der durch den Schwerpunct G gehenden horizontalen Axe (241. §.): also ist $\mu = Pk^2 + PD^2$ (das.), und $k^2 = \frac{\mu - PD^2}{P}$, daher

$$az = D + \frac{\mu - PD^2}{PD} = \frac{\mu}{PD}.$$

Beyspiel.

20. Fig. 1. Das Pendul bestehe aus einer Stange ab (20. Fig.) und einer daran befestigten Kugel bpq, dergestalt, daß die Schwerpuncte c, g der Kugel und der Stange in einer durch den Aufhängungspunct a gehenden geraden Linie ad liegen; so liegt der gemeinschaftliche Schwerpunct der Kugel und der Stange, mithin der Schwerpunct des ganzen Penduls irgendwo in G zwischen g und c.

2. Das Gewicht der Stange sey p, und ihre Länge $ab = a$, die Dicke aber sey so gering, daß man sie in Vergleichung mit der Länge als unbeträchtlich betrachten darf; so ist $ag = bg = \frac{1}{2}a$ die Entfernung des Schwerpuncts g von a und b, und $\frac{1}{2}p$ ist das Gewicht der halben Stange: das Moment der Trägheit der ganzen Stange in Ansehung einer durch ihren Schwerpunct g laufenden horizontalen Axe ist also nach (223. 208. §.), wegen des dortigen $h = 0$.

$$\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}p\cdot(\tfrac{1}{2}a)^2 + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}p\cdot(\tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{12}pa^2.$$

3. Das Gewicht der Kugel bpq sey P, und r ihr Halbmesser; so ist das Moment der Trägheit der Kugel in Ansehung ihres horizontalen Durchmessers nach (221. §.) $= \frac{2}{5}Pr^2$.

4. Aus (2) 3) nach (215. 208. §.) erhält man das Moment der Trägheit des ganzen Penduls in Ansehung der horizontalen Schwungaxe mn.

$$(\tfrac{1}{12} pa^2 + \tfrac{1}{4} pa^2) + (\tfrac{2}{5} Pr^2 + P(a+r)^2) =$$
$$= \tfrac{1}{3} pa^2 + P(a^2 + 2ar + \tfrac{7}{5} r^2).$$

5. Es ist ferner $gG = \frac{gc \cdot P}{P+p} = \frac{(a+2r)P}{2(P+p)}$ die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpuncts G, der Stange ab, und der Kugel bpq vom Schwerpuncte g der Stange; mithin ist $aG = ag + gG = \frac{1}{2}a + \frac{(a+2r)P}{2(P+p)}$ die Entfernung desselben von a: also ist $aG(P+p) = (a+r)P + \frac{1}{2}ap$ das statische Moment des ganzen Penduls in Ansehung der Axe mn. Hieraus und aus (4) erhält man also

$$\frac{\tfrac{1}{3}pa^2 + P(a^2 + 2ar + \tfrac{7}{5}r^2)}{(a+r)P + \tfrac{1}{2}ap}$$

für die Entfernung des Mittelpuncts des Schwunges von der Schwungaxe mn.

6. Wird, statt der Stange ab, ein Faden genommen, dessen Gewicht p in Vergleichung mit dem Gewichte P der Kugel sehr gering seyn mag; so kann man dieselbe Entfernung $= \frac{a^2 + 2ar + \frac{7}{5}r^2}{a+r} = a + r + \frac{2r^2}{5(a+r)}$ setzen.

Der IV. Abschnitt.

Von der Exhaustionsmethode der Alten, und der ihr angemessensten Methode die Gründe der Differential- und Integralrechnung festzusetzen.

249. §.

Der im (8. §.) erwiesene Satz ist der Hauptgrund der Exhaustionsmethode der Alten, deren sich Euclid vorzüglich im 12ten Buche seiner Elemente, und Archimed fast durchgängig bey seinen Untersuchungen bedient hat: unter den neuesten Schriftstellern hat sie Karsten bey Beweisen der wichtigsten geometrischen Sätze am besten gebraucht [(a)], und mit Recht dieselbe als ein Muster der vollkommensten Ueberzeugung, welche bey allen mathematischen Untersuchungen herrschen sollte, gerühmt [(b)]. Gleichwohl wird dieses vom Herrn Michelsen bezweifelt: ich würde keine Erwähnung davon machen, wenn ich mich nicht selbst derselben Methode bey den wichtigsten Sätzen der Differentialrechnung bediente, um sie aufs vollkommenste zu beweisen: da aber dieses bey meiner Darstellung der Gründe derselben Rechnung wirklich geschieht (69. §.); so halte ich es nicht für überflüssig, meine Leser mit seiner Meinung bekannt zu machen, und dieselbe gehörig zu prüfen.

(a) Lehrbegriff der gesammten Mathematik. I. Th. S. 295. 213. u. s. w.

(b) Mathematische Abhandlungen. I. Abhandl. 50. §.

250. §.

Weil Herr **Michelsen** zur Erläuterung seiner Meinung das Beyspiel vom Kreise anführt; so will ich hier die Gründe auseinander setzen, auf welchen der Beweis dafür nach (8. §.) beruhet.

1) Für jede denkbare Fläche e, sie mag wie immer klein seyn, müssen bey ihr drey Puncte denkbar seyn, welche nicht in einer geraden Linie liegen, sondern als drey Spitzen eines ganz in der Fläche e liegenden Dreyecks können betrachtet werden: also ist ein Dreyeck kleiner als e denkbar, dessen Seiten wirkliche Linien sind; dafür ist daher auch ein rechtwinklichtes Parallelogramm kleiner als e denkbar, welches bey gleicher Höhe die halbe Grundlinie jenes Dreyecks zur Grundlinie hat. Nenne ich daher a die Höhe, und b die Grundlinie dieses Rechtecks; so ist ein Rechteck $ab < e$ denkbar. Nun mag eine dritte gerade Linie L was immer seyn, weil a, b, wie immer klein, doch wirkliche Linien, und nicht bloß Puncte sind; so ist eine vierte Proportionallinie $x:a = b:L$ denkbar, wofür $xL = ab$ seyn würde, mithin $xL < e$, das heißt: wenn man sich bey e eine, wie immer kleine, doch wirkliche Fläche denkt: so muß über jeder geraden Linie L ein Rechteck xL kleiner als e denkbar seyn.

2) Der Halbmesser eines Kreises sey r, und seine Peripherie $= \pi$. Denkt man sich nun zwey ähnliche regelmäßige Vielecke, wovon eines um- und das andere eingeschrieben seyn mag; so wird man leicht finden, daß, wenn P den Umfang des umgeschriebenen, und p den des einge-

schriebenen bedeutet, X aber den Flächeninhalt des ganzen Kreises bezeichnet, allemal ist:

$$\text{I. } P > \pi \text{ und } p < \pi.$$

$$\text{II. } X > \frac{pr}{2} \text{ und } X < \frac{Pr}{2}.$$

3) Wegen I) sey $P - \pi = D$ und $\pi - p = d$, mithin $P = D + \pi$, und $p = \pi - d$; so ist wegen II.) allemal

$$\text{III. } X > \frac{\pi r}{2} - \frac{dr}{2},\ X < \frac{\pi r}{2} + \frac{Dr}{2}.$$

4) Die geraden Linien d, D in (3) sind desto kleiner, je näher die Vielecke (2) an der Peripherie des Kreises liegen: es läßt sich aber aufs schärfste darthun, daß für jede denkbare wie immer kleine gerade Linie z solche Vielecke (2) denkbar sind, für welche ist sowohl $D < z$, als $d < z$, mithin auch $\frac{Dr}{2} < \frac{zr}{2}$, $\frac{dr}{2} < \frac{zr}{2}$.

5) Es ist aber für jede denkbare, wie immer kleine Fläche e eine gerade Linie z denkbar, wofür $\frac{1}{2} r . z < e$ seyn muß (1).

6) Demnach sind auch solche gerade Linien D, d in (3) denkbar, für welche die Rechtecke $D . \frac{r}{2}$, $d . \frac{r}{2}$ kleiner seyn würden, als jede denkbare, wie immer kleine, Fläche e, nach (4) 5).

7) In (III) nach (8. §.) muß also nothwendig $X = \frac{\pi r}{2}$ seyn.

251. §.

251. §.

Was nun Herr Michelsen denjenigen Exhaustions-Beweisen entgegensetzt, welche unter die von ihm angeführte sehr richtige Beschreibung des Abbe de la Chapelle gehören, betrifft sowohl meinen Satz in (8. §.), als die Art die Beweise darauf zu gründen, wie es z. B. in (250. §.) geschah. Auf die Frage: wie weit erstrecken sie sich? antwortet er so: [(a)]

„Meiner Meinung nach nicht weiter, als daß sie die „Gleichheit zweyer Größen darthun, in sofern sich diese „Größen durch Zahlen ausdrücken lassen. Daß sich keine „Größe geben lasse, um welche ein Kreis und ein rechtwink-„lichtes Dreyeck von einander verschieden wären, dessen eine „Cathete dem Umfange des Kreises, die andere dem Radius „desselben gleich ist, das setzt z. B. der archimedeische Be-„weis außer allen Zweifel; allein ob nicht gleichwohl zwi-„schen einem Kreise und einem Dreyecke von der gedachten „Art ein Unterschied möglich sey, dessen Größe zwar unbe-„stimmbar klein, aber demungeachtet immer ein gedenkba-„rer Unterschied und nicht = 0 wäre? Dieses läßt sich dar-„nach weder bejahen, noch verneinen."

„Irre ich mich in dieser Behauptung nicht: so ist das „eine sehr leichte Folge aus dem Bisherigen, daß alle die „Sätze der Mathematik, welche auf Exhaustions-Beweisen „der beschriebenen Art beruhen, so lange sie bloß dadurch „bewiesen werden, noch nicht in möglich größter Schärfe „und Strenge bewiesen worden seyen."

(a) Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik. 3tes Stück. S. 193. 194.

252. §.

Also könnte in (8. §.) noch immer ein Unterschied zwischen Z und X vorhanden seyn, welcher zwar unbestimmbar klein, doch nicht $=0$, wäre (251. §.), das heißt; es könnte zwischen Z und X noch immer ein Unterschied D Statt finden, welcher zwar kleiner als jede Größe, die sich angeben läßt, aber noch nicht $=0$, sondern eine wirkliche zu der Art gehörige Größe wäre, zu welcher die Größen Z, X gehören mögen: aber eben hievon ist die Unmöglichkeit in (8. §.) dargethan worden, zwar bey der Voraussetzung, daß U, V daselbst solche Größen sind, welche kleiner können gedacht werden, als jede denkbare, wie immer kleine gleichartige Größe; nur bey der Anwendung des Satzes (8. §.) muß allemal bewiesen werden, daß solche Größen U, V wirklich da sind, wie z. B. in (250. §.). Der unbestimmbar kleine, der doch nicht $=0$ ist, Unterschied zwischen X und $\frac{\pi r}{2}$ in (250. §.), welcher vielleicht da vorhanden seyn möchte (251. §.), müßte doch eine wirkliche Fläche e seyn, die mit keinem Puncte und keiner Linie dürfte verwechselt werden: da aber dafür kleinere Flächen $\frac{Dr}{2}$, $\frac{dr}{2}$ denkbar wären (250. §. n. 6.); so erhellet die Unmöglichkeit eines solchen Unterschiedes, wegen (250. §. n. 3.) nach (8. §.).

253. §.

Wie überzeugend die Beweise nach der Exhaustionsmethode sind, wenn dieselben gehörig geführt werden, und wie sehr dadurch selbst die analytische Erfindungsmethode

kann

kann erweitert werden, zeigt sich am trefflichsten, wenn man mit dem in (8. §.) aufgestellten Satze die Summirung der Reihen natürlicher Zahlen und ihrer Potenzen verbindet: ich will nur die drey ersten Potenzen zu Hülfe nehmen, um einen Satz zu beweisen, dessen Gebrauch in der Elementar-Mathematik wichtig genug ist. Ein Leichtes wäre es mir, einen solchen Satz überhaupt für alle mögliche Potenzen zu erweisen; doch begnüge ich mich mit jenen Potenzen, da sie zu meinem Zwecke hinreichen. Daher setze ich voraus, folgende Summen seyen aus (I. Band. 141. §. 1. Zusatz) bekannt.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + N = \tfrac{1}{2}(N^2 + N).$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \tfrac{1}{6}(2N^3 + 3N^2 + N).$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + N^3 = \tfrac{1}{4}(N^4 + 2N^3 + N^2).$$

254. §.

Wenn P, Q zwo bestimmte Größen sind; so muß eine ganze Zahl m denkbar seyn, für welche ist $P\frac{1}{m^2} < Q\frac{1}{m}$, und sowohl die Differenz $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2}$, als die Summe $Q\frac{1}{m} + P\frac{1}{m^2}$ kleiner, als jede denkbare, wie immer kleine, doch wirkliche gleichartige Größe e.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem in (2. §.) bewiesenen allgemeinen Satze: ich will ihn aber unabhängig von jenem Satze darthun, damit die vollkommenste Ueberzeugung, welche der Beweis gewährt, um so deutlicher könne bemerkt werden.

1. Die Zahl m mag was immer für eine seyn; so ist doch allemal $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2} < Q\frac{1}{m} + P\frac{1}{m^2}$.

2. Nun mag e eine wie immer kleine, doch wirkliche, Größe bedeuten; so muß für die gegebene Größe P+Q eine ganze Zahl m denkbar seyn, wofür mmal e ein Vielfaches größer als P+Q, mithin ein mtel von P+Q kleiner als e möglich seyn würde, nämlich

$$\frac{1}{m}(P+Q) = \frac{1}{m}P + \frac{1}{m}Q < e.$$

3. Für dieselbe Zahl m wäre demnach $\frac{1}{m}P < e$ in (2): da also die gegebene Größe $Q > e$ seyn soll; so wäre auch $\frac{1}{m}P < Q$, folglich $\frac{1}{m^2}P < \frac{1}{m}Q$, und $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2}$ eine wirklich bejahte Größe.

4. Weil ferner $\frac{1}{m^2}P < \frac{1}{m}P$ ist; so wäre auch $\frac{1}{m^2}P + \frac{1}{m}Q < e$, wegen (2): folglich in (3) auch $Q\frac{1}{m} - P\frac{1}{m^2} < e$, wegen (1).

Es ist einleuchtend, daß der Hauptgrund des Beweises in (2) liegt, welches selbst Michelsen nicht bezweifeln darf, wenn er sich auch eine nach seiner Vorstellungsart unendlich, oder, welches bey ihm gleich viel bedeutet, unbestimmbar kleine, doch in sich bestimmte wirkliche Größe, bey e denken will: noch immer wäre eine solche ganze Zahl m denkbar, nur unbestimmbar groß müßte sie seyn, wenn e unbestimmbar klein wäre. Wir werden übrigens unten

sehen,

sehen, daß dieses mit den Begriffen, welche Er sich von unendlich kleinen Größen gemacht hat, vollkommen übereinstimmt.

255. §.

Die Ausdrücke $L = \alpha \frac{n}{m^2} + \beta \frac{n^2}{m^3} + \gamma \frac{n^3}{m^4}$, $M = \alpha \frac{n+1}{m^2} + \beta \frac{(n+1)^2}{m^3} + \gamma \frac{(n+1)^3}{m^4}$ sollen die unbestimmten Glieder zwoer Reihen bedeuten, derer alle einzeln genommene Glieder daraus entstehen würden, wenn man $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, u. s. f. bis $n = m - 1$ nach und nach nähme: die Summen derselben Reihen werde ich aber mit $SL = S\left(\alpha \frac{n}{m^2} + \beta \frac{n^2}{m^3} + \gamma \frac{n^3}{m^4}\right)$, $SM = S\left(\alpha \frac{n+1}{m^2} + \beta \frac{(n+1)^2}{m^3} + \gamma \frac{(n+1)^3}{m^4}\right)$ bezeichnen.

256. §.

Ist nun eine Größe Z von der Beschaffenheit, daß für gewisse bestimmbare Größen α, β, γ, und jede denkbare wie immer große ganze Zahl m

$$Z > S\left(\alpha \frac{n}{m^2} + \beta \frac{n^2}{m^3} + \gamma \frac{n^3}{m^4}\right)$$

und zugleich

$$Z < S\left(\alpha \frac{n+1}{m^2} + \beta \frac{(n+1)^2}{m^3} + \gamma \frac{(n+1)^3}{m^4}\right)$$

in der Bedeutung (255. §.) seyn muß; so ist nothwendig $Z = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{4}\gamma$.

1. Denn

1. Denn es ist nach (255. 253. §.)

$$S\left(\alpha\frac{n}{m^2}+\beta\frac{n^2}{m^3}+\gamma\frac{n^3}{m^4}\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\alpha(1+2+3+----+(m-1))\frac{1}{m^2}\\ +\beta(1^2+2^2+3^2+----+(m-1)^2)\frac{1}{m^3}\\ +\gamma(1^3+2^3+3^3+----+(m-1)^3)\frac{1}{m^4}\end{array}\right\}=X-U$$

für $X=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{4}\gamma$

und $U=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\frac{1}{m}-(\frac{1}{6}\beta+\frac{1}{4}\gamma)\frac{1}{m^2}$.

2. Ferner ist nach (255. 253. §.).

$$S\left(\alpha\frac{n+1}{m^2}+\beta\frac{(n+1)^2}{m^3}+\gamma\frac{(n+1)^3}{m^4}\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\alpha(1+2+3+---+m)\frac{1}{m^2}\\ +\beta(1^2+2^2+3^2+---+m^2)\frac{1}{m^3}\\ +\gamma(1^3+2^3+3^3+---+m^3)\frac{1}{m^2}\end{array}\right\}=X+V$$

für X, wie in 1) und

$$V=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\frac{1}{m}+(\frac{1}{6}\beta+\frac{1}{4}\gamma)\frac{1}{m^2}.$$

3. Vermöge der Voraussetzung ist also in (1) 2) für jede denkbare ganze Zahl m:

$Z > X-U$ und zugleich $Z < X+V$.

4. Es ist aber allemal eine ganze Zahl m denkbar, für welche sowohl U als V in (1) 2) kleiner wäre, als jede denkbare wie immer kleine Größe e (254. §.): wegen (3) ist also ganz gewiß $Z=X$ (8. §).

257. §.

257. §.

Der Satz in (256. §.) gilt auch alsdann, wenn auch einige unter den bestimmten Größen α, β, γ gleich Null gesetzt werden: ich habe alle drey auf einmal mitgenommen, um sieben verschiedene Sätze auf einmal darthun zu können. Dadurch lassen sich viele Sätze in der Elementarmathematik auf dem kürzesten Wege darthun, ohne daß man genöthigt sey, von der Exhaustionsmethode der Alten im geringsten abzuweichen; man hat sogar den Vortheil dabey, daß man den Anfänger zugleich mit der Erfindungsmethode einigermaßen bekannt machet: ein Beyspiel zur Probe wird hinreichen.

Für den gegebenen Halbmesser BC = r (15. Fig.) den körperlichen Inhalt der Halbkugel DBE zu finden. 15 Fig.

1. Für das Verhältniß $1 : \pi$ des Halbmessers zur halben Peripherie ist πr^2 der Quadratinhalt der Grundfläche DE.

2. Der ganze auf der Grundfläche DE senkrecht stehende Halbmesser BC = r sey in m gleiche Theile getheilt; und durch alle Theilungspuncte denke man sich eben so viele zur Grundfläche parallele Durchschnitte: so kann man sich bey der Halbkugel DBE m umgeschriebene, und zugleich $m - 1$ eingeschriebene Cylinder vorstellen, welche zur gemeinschaftlichen Höhe ein mtel des Halbmessers r haben sollen, wie z. B. der umgeschriebene Cylinder abgh, und der eingeschriebene cdfe für $Pp = \frac{r}{m}$ seyn würde.

3. Nimmt

3. Nimmt man an, es sey $Bp = \frac{n}{m} r$, und $BP = \frac{n+1}{m} r$, so ist

$$2r^2 . \frac{n}{m} - r^2 . \frac{n^2}{m^2}$$

das Quadrat des Halbmessers des Durchschnitts df, und

$$2r^2 . \frac{n+1}{m} - r^2 . \frac{(n+1)^2}{m^2}$$

ist das Quadrat des Halbmessers des Durchschnittes ah: da also die Durchschnitte df, ah sich gegen die Grundfläche DE, wie die Quadrate ihrer Halbmesser gegen das Quadrat des Halbmessers r verhalten; so ist wegen (1)

$$r^2 : \left(2r^2 . \frac{n}{m} - r^2 . \frac{n^2}{m^2}\right) = \pi r^2 : df = \pi r^2 \left(2 \frac{n}{m} - \frac{n^2}{m^2}\right);$$

$$r^2 : \left(2r^2 . \frac{n+1}{m} - r^2 . \frac{(n+1)^2}{m^2}\right) = \pi r^2 : ah = \pi r^2 \left(2 \frac{n+1}{m} - \frac{n+1}{m^2}\right).$$

4. Wegen (3) ist also der

umgeschriebene Cylinder

$$abgh = ah . Pp = \pi r^3 \left(2 \frac{n+1}{m^2} - \frac{(n+1)^2}{m^3}\right)$$

und der eingeschriebene

$$cdfe = df . Pp = \pi r^3 \left(2 \frac{n}{m^2} - \frac{n^2}{m^3}\right).$$

5. Nun ist klar, daß, wegen (2) 3) abgh eigentlich der, von B an gegen DE zu gerechnet, (n+1)te umgeschriebene, und cdfe der nte eingeschriebene Cylinder ist, daß man also alle m umgeschriebenen, und m − 1 eingeschriebenen Cylinder erhalten würde, wenn man nach und nach n = 0, n = 1, n = 2, - - - - n = m − 1 in (4) setzte:

setzte: da also die Halbkugel DBE gewiß größer als die Summe aller eingeschriebenen, und zugleich kleiner als die Summe aller umgeschriebenen Cylinder in (2) seyn muß; so hat man wegen (4) nach (255. §.)

$$DBE > S\left(2\pi r^3 \frac{n}{m^2} - \pi r^3 . \frac{n^2}{m^3}\right);$$

und zugleich

$$DBE < S\left(2\pi r^3 \frac{n+1}{m^2} - \pi r^3 . \frac{(n+1)^2}{m^3}\right).$$

Nun gilt dieses gewiß allemal, es mag die Zahl m der gleichen Theilchen von $r = BC$ in (2) wie immer groß gedacht werden: also ist nach (256. §.) $DBE = \frac{1}{2} . 2\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$.

Auf gleiche Art kann man den Cubicinhalt eines unbestimmten Abschnittes aBh bestimmen, und so auch jede Pyramide, jeden Kegel, und die runden durch die Umdrehung der Kegelschnitte um ihre Axen erzeugten Körper berechnen. Für alle solche Körper lassen sich auch die Schwerpuncte in der Statik bestimmen, so wie auch der einzige vorhergehende Satz zur Auflösung vieler wichtigen Aufgaben in der gesammten angewandten Mathematik kann mit großem Vortheil gebraucht werden, z. B. bey der Berechnung des Moments der Trägheit; Bestimmung der Räume bey der gleichförmig beschleunigten Bewegung, u. d. gl.

258. §.

Die ältesten merkwürdigsten Schriften, welche zur Erweiterung der mathematischen Erfindungsmethode den Weg bahnten, sind: *Geometria indivisibilibus continuorum nova*

qua-

quadam ratione promota, welche *Cavalleri* im J. 1635 herausgab, und die darauf gebaute im Jahr 1655 von *Wallis* herausgegebene *Arithmetica infinitorum*. *Cavalleri* stellte sich jede ebene Figur aus lauter geraden Linien, und jeden Körper aus Ebenen zusammengesetzt vor: jede ebene Figur, und jeder Körper sollte demnach aus untheilbaren Theilen bestehen, und aus diesem Grunde hieß auch seine Erfindungsmethode die **Methode der Untheilbaren**, (*Methodus indivisibilium.*) Eben so betrachtete **Wallis** die ebenen Figuren und Körper; jene waren bey ihm aus unendlich vielen parallelen Linien, und diese aus unendlich vielen parallelen Ebenen zusammengesetzt. Er meinte, man könne sich zwar hier die Vorstellung machen, als wenn zwischen den parallelen Linien Parallelogrammen, und zwischen den parallelen Ebenen Cylinder oder Prismen, gleichsam eingeschoben, vorhanden wären, welche alle eine Höhe, nämlich einen unendlich kleinen aliquoten Theil der Höhe der ganzen Figur, oder des ganzen Körpers haben sollten: doch glaubte Er, es sey allerdings besser, die erste Vorstellungsart beyzubehalten, theils damit die Untersuchungen abgekürzt werden, theils auch um sich von den Grundsätzen der bereits angenommenen Methode der Untheilbaren nicht zu entfernen, da ohnehin die unendlich kleine Höhe eigentlich keine Höhe ist, mithin jene Parallelogrammen und Cylinder oder Prismen im Grunde nur gerade Linien und ebene Figuren sind. Mit diesen Grundsätzen verband hierauf **Wallis** die Verhältnisse der Summen der von 0 an in natürlicher Ordnung wachsenden Zahlen 0, 1, 2, 3, - - - n, und ihrer Potenzen 0^m, 1^m, 2^m, - - - n^m gegen die Summen

der

der aus gleich vielen, den größten Gliedern n und n^m gleichen Gliedern bestehenden Reihen n, n, n, n, - - - n und n^m, n^m, n^m, n^m, - - - n^m, die Er durch Induction für jede Gattung der Exponenten m zu bestimmen sucht.

259. §.

So schwankend und unmathematisch auch die Grundsätze der Cavalerischen Methode der Untheilbaren sind, worauf **Wallis** seine Rechnungen in der *Arithmetica infinitorum* gebaut hatte; so haben wir doch **Wallises** Methode die wichtigsten Entdeckungen zu verdanken: die der Mathematik eigene Evidenz und Gewißheit, das vollkommen Ueberzeugende, wodurch sich die Exhaustionsmethode der Alten so sehr empfohlen hat, findet man zwar bey seinen Untersuchungen nicht; es war aber in dem damaligen Zustande der Mathematik keine leichte Sache, bey den Erweiterungen der Erfindungsmethode, welche er überall zum Ziel hatte, diejenige Schärfe und Strenge bey Beweisen zu beobachten, welche bey allen Beweisen nach der Exhaustionsmethode der Alten herrscht. Unverzeihlich ist es hingegen, daß viele unter den neueren Schriftstellern noch immer jenen Grundsätzen getreu bleiben, welche beyde, **Cavaleri** und **Wallis**, ganz gewiß verwerfen würden, wenn sie am Ende des achtzehnten Jahrhunderts lebten. Auch **Karsten** hat sich bey einigen Untersuchungen der Reihen natürlicher Zahlen bedient, aber auf eine mehr überzeugende Art: er findet z. B. [(a)], daß, wenn ein schwerer Punct in der ersten Secunde, indem er frey fällt, die Geschwindig-

keit k erlanget, und in der Zeit t durch die Höhe s fällt, allemal

$$s > kt^2(1+2+3+ - - - +(m-1))\frac{1}{m^2},$$

und zugleich

$$s < kt^2(1+2+3+ - - - - + m)\frac{1}{m^2},$$

oder

$$s > \tfrac{1}{2}kt^2 - \tfrac{1}{2}kt^2 . \frac{1}{m} \text{ und } s < \tfrac{1}{2}kt^2 + \tfrac{1}{2}kt^2 . \frac{1}{m}$$

seyn muß, wenn m eine unbestimmte Anzahl gleicher Theile bedeutet, in welche man sich die ganze Zeit t eingetheilt denken kann: freylich wäre es zu wünschen gewesen, daß er vermieden hätte, $m = \infty$ zu setzen, um daraus $s = \frac{1}{2}kt^2$ zu erhalten; er würde nicht nöthig gehabt haben, sich darüber an einem andern Orte (b) umständlicher zu erklären, um den Verdacht, als wenn bey einem solchen Verfahren eine unendliche Reihe wirklich summirt würde, von sich abzulehnen. Aus diesem Grunde ist der Beweis, welchen Hr. Hofr. Kästner für die Ausrechnung der Pyramiden gegeben hat (c) bündiger, einleuchtender, und dem Geiste der Alten mehr angemessen. Der im (256. §.) erwiesene Satz ist eine Erweiterung der Methode, solche Untersuchungen anzustellen: daß es nicht schwer wäre, dieselbe auf alle Potenzen natürlicher Zahlen auszudehnen, habe ich bereits bemerkt (253. §.). Dieses soll nun jetzt geschehen, aber auf eine andere, meinem Vorhaben, den Uebergang von der Exhaustionsmethode der Alten zur Differential- und Integralrechnung, wie er hätte geschehen können, aufs deut-

deutlichste und allgemeinste zu zeigen, entsprechendere Art.

(a) Lehrbegriff der gesammten Mathematik. III. Theil. Mechanik. 24. §.

(b) Mathematische Abhandlungen. I. Abhandlung. 61-64. §.

(c) Geometrische Abhandlungen. 2te Sammlung. 6. u. 7. Aufsatz.

260. §.

Der veränderliche Theil Z jeder Function $y = Z + \text{Const.}$ von einer absoluten veränderlichen Größe x ist gleich der Summe aller Werthe, welche die Differenz Δy erhalten würde, wenn man bey ihr nach und nach $0 . \Delta x$, $1 . \Delta x$, $2 . \Delta x$, $3 . \Delta x$ ----- $(m - 1)\Delta x$ statt x nähme, wie immer auch der Nenner m des aliquoten Theils $\Delta x = \frac{x}{m}$ klein oder groß ist (40. §.)

1. Es ist nach (44. §.) $\Delta y = \Delta Z$.

2. Weil $\Delta x = \frac{x}{m}$ seyn soll; so ist $m\Delta x = x$, und $(m+1)\Delta x = x + \Delta x$. Wenn man also $(m+1)\Delta x$ statt x in Z setzt; so entstehet Z′ aus Z, und es ist $Z' - Z = \Delta Z = \Delta y$ in (1). Setzt man aber $m\Delta x$ statt x in Z; so bleibt Z unverändert.

3. Man stelle sich vor, es werden die Glieder folgender Reihe I) nach und nach statt x in Z genommen, wofür Z die Werthe in II), derer Unterschiede $A - 0 = A$, $A^2 - A = a^1$, $A^3 - A^2 = a^2$, u. s. f. in III) stehen sollen, erlangen mag (2).

 I. Δx,

I. Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, - - - $(m-1)\Delta x$, $m\Delta x$, $(m+1)\Delta x$.
II. A, A^2, A^3, - - - A^{m-1}, Z, Z'.
III. A, a^1, a^2, - - - a^{m-2}, a^{m-1}, Δy.

4. Nun muß man darthun, daß, erstens, die Function Z der Summe aller Glieder der Reihe III), das letzte Glied Δy ausgeschlossen, gleich ist; und, zweytens, die einzelnen Glieder A, a^1, a^2, - - - a^{m-1} derselben Reihe entstehen würden, wenn man bey Δy nach und nach $\Delta x . 0$, $\Delta x . 1$, $\Delta x . 2$, $\Delta x . 3$, - - - - $\Delta x (m-1)$ statt x nähme.

5. Der erste Theil in (4) erhellt so. Er ist $a^1 = A^2 - A$, und $a^2 = A^3 - A^2$: also ist $A^2 = A + a^1$; $A^3 = A^2 + a^2 = A + a^1 + a^2$.

Und überhaupt soll in II) III) $a^r = A^{r+1} - A^r$, daher $A^{r+1} = A^r + a^r$ seyn: setzt man demnach $A^r = A + a^1 + a^2 + a^3 + - - - + a^{r-1}$; so ist $A^{r+1} = A + a^1 + a^2 + a^3 + - - - + a^{r-1} + a^r$.

Hieraus folgt, daß jedes nte Glied in II) der Summe von n Gliedern A, a^1, a^2, u. s. f. der Reihe III) gleich ist, (I. Band. 54. §.), daß demnach Z, als das mte Glied der Reihe II) der Summe $A + a^1 + a^2 + a^3 + - - - + a^{m-1}$ von m Gliedern der Reihe III) gleich seyn muß.

6. Und der zweyte Theil in (4) läßt sich so darthun: Wenn x in $x + \Delta x$ übergeht; so wird Z' aus Z nach (2): und wenn man $r\Delta x$ oder $(r+1)\Delta x$ statt x in Z nimmt; so erhält man daraus A^r oder A^{r+1} bey der Reihe II). Da also x und $x + \Delta x$ in $r\Delta x$ und $r\Delta x + \Delta x$ übergehen müssen, wenn man $r\Delta x$ statt x nimmt; so werden die Functionen

Z,

Z, Z' in A^r, A^{r+1} übergehen, wenn man bey ihnen $r\Delta x$ statt x setzt; folglich wird $A^{r+1} - A^r$ aus $Z' - Z$ entstehen, wenn man $r\Delta x$ statt x bey $\Delta y = Z' - Z$ in (1) nimmt, das heißt: wenn man $r\Delta x$ statt x bey $\Delta y = Z' - Z$ nähme; so würde man das $(r+1)$te Glied $a^r = A^{r+1} - A^r$ der Reihe III) erhalten. Die einzelnen Glieder von III) entstünden daher aus Δy, wenn man hier $\Delta x.0$, $\Delta x.1$, $\Delta x.2$, $\Delta x.3$ ---- $\Delta x(m-1)$ statt x nach und nach nähme.

261. §.

Denkt man sich also die absolute veränderliche Größe x bey einer Function y in m gleiche Theile getheilt, und setzt man $\Delta x = \frac{x}{m}$; so kann man sich die Vorstellung machen, daß x bey y von $x = 0.\Delta x$ an allmählich um die Differenz Δx wächst, dergestalt, daß x nach und nach in Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, u. s. f. bis $(m+1)\Delta x = x + \Delta x$ übergeht, wofür die Function y selbst nach und nach die Werthe A, A^2, A^3, --- y, y' erhalten mag, wie bey der Reihe II) in (260. §.): und wenn man hierauf jeden derselben Werthe von dem nächst folgenden abzöge, mithin die Differenzen $A - 0 = A$, $A^2 - A = a^1$, $A^3 - A^2 = a^2$, ---- $y' - y = \Delta y$ nähme; so würden sie eine Reihe A, a^1, a^2, a^3, --- a^{m-1}, Δy von $m+1$ Gliedern geben, dergestalt, daß man alle nach der Ordnung aus der letzten Differenz Δy erhielte, wenn man bey ihr $0\Delta x$, $1\Delta x$, $2\Delta x$, $3\Delta x$, --- $(m-1)\Delta x$ nähme: die Function y selbst (oder vielmehr nur der veränderliche Theil Z von ihr) wäre der Summe aller vorhergehenden Differenzen A, a^1, a^2, a^3, --- a^{m-1} gleich (260. §.).

262. §.

Unabhängig von der Differentialrechnung, bloß mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes, wofür ein Beweis für alle rationale und irrationale Exponenten in (11. §.) ist angeführt worden, läßt sich beweisen, daß es vollkommen bestimmte, von z unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. geben muß, wofür und jeden Exponenten n ist $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \text{---} + z^n = \frac{z^{n+1}}{n+1} + \alpha z^n + \beta z^{n-1} + \gamma z^{n-3} +$ etc.: dieses geschieht um so leichter, da wir mehr von den Coefficienten α, β, γ, etc. zu wissen gar nicht brauchen. Für eine ganze bejahte Zahl n findet man eine Formul des summatorischen Gliedes in (I. Band. 141. §.): da aber der binomische Lehrsatz, auf welchem der Beweis derselben beruhet, auch für alle andern Zahlen n gilt; so muß die dortige Formul für alle Zahlen n gelten (eigentlich ist dort m der Exponent, und n was hier z), nur das letzte Glied muß bey ihr wegfallen: und eben aus dieser Formul kann man die obige Reihe herleiten, die ich daher hier als erwiesen annehme.

263. §.

Wenn N, n zwo von x und $\Delta x = \frac{x}{m}$ unabhängige Größen sind; so müssen andere ebenfalls von x und Δx unabhängige Größen möglich seyn, für welche die Summe $SN(x+\Delta x)^n \Delta x$ derjenigen Werthe, welche $N(x+\Delta x)^n \Delta x$ erhalten würde, wenn man $0\Delta x$, $1\Delta x$, $2\Delta x$, ---$(m-1)\Delta x$ nach und nach statt x nähme, der Summe des Quotienten $\frac{Nx^{n+1}}{n+1}$ und

der

der Producte aus jenen Größen in die Potenzen $\Delta x, \Delta x^2, \Delta x^3$, etc. gleich wäre.

1. Nach dieser Voraussetzung ist $SN(x+\Delta x)^n \Delta x = N\Delta x^{n+1}(1^n+2^n+3^n+ - - - +(m-1)^n+m^n)$.

2. Also giebt es gewisse von x und Δx unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. wofür nach (262. §.) ist $SN(x+\Delta x)^n \Delta x = N\Delta x^{n+1}\left(\frac{m^{n+1}}{n+1} + \alpha m^n + \beta m^{n-1} \gamma m^{n-2} + \text{etc.}\right)$. Es ist aber vermöge der Voraussetzung $m = \frac{x}{\Delta x}$: also muß seyn

$$SN(x+\Delta x)^n \Delta x = \frac{Nx^{n+1}}{n+1} + N\alpha x^n . \Delta x + N\beta x^{n-1} . \Delta x^2 + N\gamma x^{n-2} . \Delta x^3 + \text{etc.}$$

264. §.

Bedeutet $SNx^n\Delta x$ die Summe derjenigen Reihe, welche man erhalten würde, wenn man $o\Delta x, 1\Delta x, 2\Delta x, 3\Delta x, - - - (m-1)\Delta x$ statt x bey $Nx^n\Delta x$ nach und nach nähme; so ist $SNx^n\Delta x = N\Delta x^{n+1}(1^n+2^n+3^n+ - - - +(m-1)^n)$ $= SN(x+\Delta x)^n \Delta x - N\Delta x^{n+1} . m^n$ (263. §. n. 1.) $= SN(x+\Delta x)^n \Delta x - Nx^n \Delta x$, wegen $m = \frac{x}{\Delta x}$: also

$$SNx^n \Delta x = \frac{Nx^{n+1}}{n+1} + N(\alpha - 1)x^n \Delta x + N\beta x^{n-1} \Delta x^2 + N\gamma x^{n-2} \Delta x^3 + \text{etc.}$$

265. §.

Wenn eine Function $y = Z +$ Const. von einer absoluten veränderlichen Größe x dergestalt beschaffen ist, daß für gewisse von x und Δx unabhängige

Größen A, B, C, - - - a, b, c, - - - A′, B′, C′, - - - a′, b′, c′, - - - P, Q, R - - - p′, q′, r′, - - - jede ganze bejahte Zahl r und jeden aliquoten Theil $\Delta x = \frac{x}{m}$ von x ihre Differenz

$$\Delta y > Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.}$$

und zugleich

$$\Delta y < A(x+\Delta x)^a\Delta x + B(x+\Delta x)^b\Delta x + C(x+\Delta x)^c\Delta x + \text{etc.}$$

oder

$$\Delta y > \begin{cases} Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.} \\ + A'x^{a'}\Delta x^r + B'x^{b'}\Delta x^{r+1} + C'x^{c'}\Delta x^{r+2} + \text{etc.} \end{cases}$$

und zugleich

$$\Delta y < \begin{cases} Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.} \\ + Px^{p'}\Delta x^r + Qx^{q'}\Delta x^{r+1} + Rx^{r'}\Delta x^{r+2} + \text{etc.} \end{cases}$$

seyn muß; so ist nothwendig der veränderliche Theil derselben Function $Z = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$

1. Gesetzt, SU, SV, SX, SY bedeuten die Summen derjenigen Werthe, welche die Functionen $U = Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.}$; $V = A(x+\Delta x)^a\Delta x + B(x+\Delta x)^b\Delta x + C(x+\Delta x)^c\Delta x + \text{etc.}$; $X = U + A'x^{a'}\Delta x^r + B'x^{b'}\Delta x^{r+1} + C'x^{c'}\Delta x^{r+2} + \text{etc.}$; $Y = U + Px^{p'}\Delta x^r + Qx^{q'}\Delta x^{r+1} + Rx^{r'}\Delta x^{r+2} + \text{etc.}$ erhalten würden, wenn man bey ihnen $0\Delta x$, $1\Delta x$, $2\Delta x$, - - - $(m-1)\Delta x$ nach und nach statt x nähme.

2. Hieraus (1) und aus (263. 264. §.) folgt, daß gewisse von Δx unabhängige Coefficienten E, F, G, - - - e, f, g, - - - I, K, L, - - - i, k, l, etc. möglich sind, für welche ist

$$SU = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$$
$$+ E\Delta x + F\Delta x^2 + G\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$SV = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$$
$$+ e\Delta x + f\Delta x^2 + g\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$SX = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$$
$$+ I\Delta x + K\Delta x^2 + L\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$SY = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$$
$$+ i\Delta x + k\Delta x^2 + l\Delta x^3 + \text{etc.}$$

3. Nun soll, vermöge der Voraussetzung, $\Delta y > U$ und zugleich $\Delta y < V$, oder $\Delta y > X$ und zugleich $\Delta y < Y$ in (1) für jeden wie immer kleinen aliquoten Theil $\Delta x = \frac{x}{m}$ von x seyn: also muß auch die Summe derjenigen Werthe, welche Δy erhalten würde, wenn man $0\Delta x$, $1\Delta x$, $2\Delta x$, $3\Delta x$ - - - $(m-1)\Delta x$ statt x nach und nach nähme, größer seyn als SU, und zugleich kleiner als SV, oder größer als SX, und zugleich kleiner als SY in (1); mithin, weil Z der veränderliche Theil der Function y seyn soll, muß nach (260. §.) allemal seyn:

$$Z > SU \text{ und zugleich } Z < SV;$$

$$\text{oder } Z > SX \text{ und zugleich } Z < SY,$$

welches, wegen (2) nach (9. §.) unumstößlich beweiset, daß $Z = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$ ist.

266. §.

Für B = 0, C = 0, D = 0, u. s. f. wäre in (265. §.)

$$\Delta y > Ax^{a}\Delta x;\ \text{und}\ \Delta y < A(x+\Delta x)^{a}\Delta x;$$

oder

$$\Delta y > Ax^{a}\Delta x + A'x^{a'}\Delta x^{r} + B'x^{b'}\Delta x^{r+1} + \text{etc.}$$

und

$$\Delta y \overline{<} Ax^{a}\Delta x + Px^{p'}\Delta x^{r} + Qx^{q'}\Delta x^{r+1} + \text{etc.}$$

Fände man nun, daß eine Function $y = Z + Const.$ wirklich so beschaffen ist, wie immer auch der aliquote Theil $\Delta x = \frac{x}{m}$ klein seyn mag; so wäre $Z = \frac{Ax^{a+1}}{a+1}$, und $y = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + Const.$ (265. §.).

267. §.

Nach (265. 266. §.) lassen sich alle Functionen von einer veränderlichen Größe x aufsuchen, und auch wirklich entweder genau, oder durch Näherung bestimmen, zu welcher Absicht wir uns sonst der Integralformul $\int x^{m}dx$ bedienen: Folgendes wird hinreichen, die Art zu erläutern, auf welche man dieselben Sätze anwenden könnte.

1. Für CP = x, MP = y, CAMP = R findet man, wie in (147. §.).

$$\Delta R > y\Delta x\ \text{und}\ \Delta R < y\Delta x + \Delta y\Delta x.$$

1. Fig. Weiter braucht man nicht zu gehen, eine allgemeine Formul zu erhalten, wornach sich alle Räume R = CAMP mögen quadriren lassen. Aus der Gleichung für die krumme Linie OMS wird man y durch x ausdrücken können, und

und man weiß schon, daß überhaupt $\Delta y = \alpha \Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 +$ etc. gesetzt werden kann (58. §.), welcher Ausdruck sonst aus y könnte hergeleitet werden: also wird man R allemal nach (265. 266. §.) finden können.

Z. B. Bey der Parabel ist $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$: also hat man für sie

$$\Delta R > p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \Delta x;$$

$$\Delta R < p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \Delta x + \alpha \Delta x^2 + \beta \Delta x^3 + \text{etc.}$$

Daher ist $R = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} . x = \frac{2}{3} y x +$ Const. (265. §.)

Beym Kreise, wenn der Anfangspunct der Abscissen an einem Endpuncte des Durchmessers wäre, hätte man $y = (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$: also

$$\Delta R > (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} . \Delta x.$$

$$\Delta R < (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} . \Delta x + \alpha \Delta x^2 + \beta \Delta x^3 + \text{etc.}$$

Verwandelt man daher $(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe; so wird man K ebenfalls durch eine Reihe nach (265. §.) bestimmen können.

II. Für $\alpha a = x$, $Pa = y$, $PBp = K$ erhielte man nach (148. §. n. 3.). 4. Fig.

$$\Delta K > \pi y^2 \Delta x; \quad \Delta K < \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x.$$

Statt dieser Gränzen kann man aber wegen (58. §.) für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten e, f, g, u. s. f. folgende annehmen.

$$\Delta K > \pi y^2 \Delta x; \quad \Delta K < \pi y^2 \Delta x + e \Delta x^2 + f \Delta x^3 + \text{etc.}$$

Diese

Diese Gränzen gäben also eine allgemeine Formul für die Cubatur runder Körper $K = PBp$.

Z. B. Für die Parabel ist $y^2 = px$: also

$$\Delta K < \pi px\Delta x;\ \Delta K < \pi px\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Mithin nach (266. §.)

$$K = \tfrac{1}{2}\pi px^2 + \text{Const.}$$

Beym Kreise, wie in (1) wäre $y^2 = 2rx - x^2$: also

$$\Delta K > \pi(2rx - x^2)\Delta x;$$

$$\Delta K < \pi(2rx - x^2)\Delta x + e\Delta x^2 + f\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Daher nach (265. §.)

$$K = \tfrac{1}{2} 2\pi rx^2 - \tfrac{1}{3}\pi x^3 + \text{Const.}$$

1. Fig. III. Für $CP = x$, $MP = y$, $AM = \varphi$ fände man, wie in (144. §.).

$$\Delta\varphi > \sqrt{(mq^2 + Mq^2)},\ \text{und}\ \Delta\varphi < Mp + pm.$$

Es ist aber $Mp = \sqrt{(pq^2 + Mq^2)} = \sqrt{(mq^2 + Mq^2 + 2mq.mp + mp^2)}$: also wäre auch

$$\Delta\varphi > \sqrt{(mq^2 + Mq^2)}\ \text{und}$$

$$\Delta\varphi < \sqrt{(mq^2 + Mq^2 + 2mq.mp + mp^2)}.$$

Nun ist $BP : MP = Mq : pq = \frac{y\Delta x}{BP}$ für die Tangente MB an M; folglich ist $mp = pq - mq = \frac{y\Delta x}{BP} - mq$. Weil also $Mq = \Delta x$, $mq = \Delta y$, und $\Delta y = \alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \text{etc.}$ ist (58. §.); so ist klar, daß es gewisse von Δx unabhängige Coefficienten K, L, M, etc. k, l, m, etc. geben muß, für welche ist:

$$\Delta\varphi > \sqrt{(\alpha^2\Delta x^2 + \Delta x^2 + K\Delta x^3 + L\Delta x^4 + \text{etc.})};$$

$$\Delta\varphi < \sqrt{(\alpha^2\Delta x^2 + \Delta x^2 + k\Delta x^3 + l\Delta x^4 + \text{etc.})}.$$

Und

Und hieraus erhellet ferner, daß es andere von Δx unabhängige Coefficienten P, Q, R, etc. p, q, r, etc. geben muß, für welche ist

$$\Delta\varphi > \Delta x\sqrt{(\alpha^2+1)} + P\Delta x^2 + Q\Delta x^3 + R\Delta x^4 + \text{etc.};$$

$$\Delta\varphi < \Delta x\sqrt{(\alpha^2+1)} + p\Delta x^2 + q\Delta x^3 + r\Delta x^4 + \text{etc.}$$

Und diese Gränzen geben eine allgemeine Formul für die Rectification krummer Linien. Ist die Gleichung für die krumme Linie gegeben; so muß man aus ihr die Ordinate y durch die Abscisse x ausdrücken, hernach Δy durch eine Reihe $\alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3$ bestimmen, wobey man nur den Coefficienten α von Δx zu wissen braucht.

Z. B. Bey der Parabel ist $y = p^{\frac{1}{2}}\sqrt{x}$: also Δy

$$= p^{\frac{1}{2}}\sqrt{(x+\Delta x)} - p^{\frac{1}{2}}\sqrt{x} = p^{\frac{1}{2}}\sqrt{x} + \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}\Delta x + \beta\Delta x^2$$

$$+ \gamma\Delta x^3 + \text{etc.} - p^{\frac{1}{2}}\sqrt{x} = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Demnach ist hier $\alpha = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$; mithin

$$\Delta\varphi > \Delta x\sqrt{\left(\frac{p+4x}{4x}\right)} + P\Delta x^2 + Q\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta\varphi < \Delta x\sqrt{\left(\frac{p+4x}{4x}\right)} + p\Delta x^2 + q\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Wird nun $\sqrt{\frac{p+4x}{4x}}$ in eine Reihe aufgelößt; so wird man φ nach (265. §.) ebenfalls durch eine Reihe bestimmen.

IV. In (171. §. n. 2. 3.) könnte man die Gränzen

$$\Delta S > C\Delta T;\quad \Delta S < (c+\Delta C)\Delta T;$$

oder

oder

$$\Delta S < C\Delta T;\ \Delta S > (C-\Delta C)\Delta T;$$

für die allgemeinen Formuln halten, welche zur Bestimmung des Raumes S dienen sollen, den ein Punct im Fall der zu- oder abnehmenden Geschwindigkeit binnen einer Zeit T durchlaufen mag.

Z. B. Wenn die Bewegung eines Puncts beschleunigt wird, und er in der ersten Zeitsecunde die Geschwindigkeit k, binnen einer Zeit T aber die Geschwindigkeit C erlanget, und einen Weg S zurücklegt; wenn man ferner annimmt, die Geschwindigkeiten verhalten sich gegen einander wie die mten Potenzen der Zeiten; so ist $1 : T^m = k : C = kT^m$; und nun $\Delta C = k(T+\Delta T)^m - kT^m = \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2 + \text{etc.}$ für gewisse, von ΔT unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. also ist

$$\Delta S > kT^m\Delta T;\ \Delta S < kT^m\Delta T + \alpha\Delta T^2 + \beta\Delta T^3 + \text{etc.}$$

Daher ist nach (266. §.)

$$S = \frac{kT^{m+1}}{m+1} + \text{Const.}$$

V. In (189. §. n. 5.) hätte man für gewisse von ΔT unabhängige Coefficienten k, l, etc.

$$\Delta C > \frac{2gV}{M}\Delta T;\ \text{und}\ \Delta C < \frac{2gV}{M}\Delta T + k\Delta T^2 + l\Delta T^3 + \text{etc.}$$

oder

$$\Delta C < \frac{2gV}{M}\Delta T;\ \text{und}\ \Delta C > \frac{2gV}{M}\Delta T - k\Delta T^2 - l\Delta T^3 + \text{etc.}$$

Diese Gränzen könnten demnach zur Bestimmung der Geschwindigkeit C dienen, welche eine veränderliche, zu- oder abnehmende, Kraft binnen was immer für einer Zeit T erzeu-

erzeugen würde, wenn sie eine Masse M fort triebe. Und wenn man diese Formuln mit den in (IV.) angegebenen verbände; so würde man sich dadurch in den Stand setzen, die Bewegung jeder Masse gehörig zu beurtheilen, wofern nur das Gesetz bekannt wäre, nach welchem die bewegende Kraft vom Anfange der Bewegung an, zu- oder abnimmt: z. B. in (192. §. n. 5.) wäre

$$\Delta C < \left(\frac{2g}{P}V - \frac{2g\Phi}{P}T^{\frac{1}{2}}\right)\Delta T.$$

$$\Delta C > \left(\frac{2g}{P}V - \frac{2g\Phi}{P}T^{\frac{1}{2}}\right)\Delta T - \alpha\Delta T^2 - \beta\Delta T^3 - \text{etc}$$

also wäre nach (265. §.)

$$C = \frac{2gV}{P}T - \frac{4g\Phi T^{\frac{3}{2}}}{3P};$$

und nun könnte man auch S nach (IV.) suchen: man würde alles, wie in (192. §.) finden.

268. §.

Aus dem Bisherigen erhellet nun deutlich, wie sehr sich die mathematischen Untersuchungen nach der Exhaustionsmethode der Alten mit Hülfe der Analysis der Neuern erweitern, und abkürzen lassen, ohne daß man nöthig hat, dieselben auf unbestimmte Begriffe zu gründen, und eben dadurch die Ueberzeugung, die sie gewähren sollen, zu schwächen. Indessen habe ich bey der vorhergehenden Theorie keine andere Absicht gehabt, als die Gränzlinie zwischen den Gründen, worauf mathematische Untersuchungen nach der Exhaustionsmethode der Alten beruhen sollten, und den Gründen der Differential- und Integralrechnung zu bestim-

men,

men, mithin jene Gründe so nahe an diese zu bringen, daß man sich dadurch in den Stand gesetzt finden möge, die vortheilhafteste Methode, nach welcher die Gründe der Differentialrechnung festgesetzt werden müssen, um desto leichter daraus abnehmen zu können: der Uebergang von jenen Gründen zu diesen liegt nun vor Augen; um so kürzer kann sich demnach das fassen, was ich noch zu erklären mir vorgenommen habe.

269. §.

Am häufigsten sind bisher unendlich kleine Größen zum Gegenstande der Differentialrechnung gemacht worden, und bloß aus diesem Grunde konnte man sie als einen Theil der Analysis des Unendlichen betrachten: folgendes enthält die vorzüglichsten Meinungen darüber.

1) Für jede Function y von einer absoluten veränderlichen Größe x giebt es eine Differenz $\Delta y = \alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 +$ etc., wobey α, β, γ, etc. gewisse von Δx unabhängige Größen bedeuten müssen (58. §.).

2) Die Differenz $\Delta x = \frac{x}{m}$ bedeutet überhaupt einen aliquoten Theil von x, und diesen kann man unaufhörlich abnehmen lassen (47. §.): man wird zwar nie auf einen solchen Theil kommen, der nicht noch kleinere Theile unter sich hätte; doch läßt sich ein aliquoter Theil von x denken, welcher kleiner ist als jeder Theil, der sich angeben, d. h. dessen Verhältniß gegen x sich bestimmen läßt. Solche Theile von x, welche kleiner sind, als jeder Theil, der sich angeben läßt, werden unbestimmbar oder auch unendlich kleine Theile von x genannt.

3) Wenn

3) Wenn man annimmt, die veränderliche Größe x wachse um einen unendlich kleinen aliquoten Theil; so heißt er das Differential von x, und wird mit dx bezeichnet: die Größe, um welche die Function y sich ändert, zu- oder abnimmt, wenn die veränderliche Größe x um das Differential dx zunimmt, wenn sie daher in x + dx übergeht, wird das Differential von y genannt, und mit dy bezeichnet.

4) Will man nun das Differential dy einer Function y von x haben, so setze man x + dx statt x in y, und ziehe von dem Werthe, welchen y dafür erlangen mag, die Function y selbst ab, nicht anders, als wenn dx eine endliche Differenz = Δx wäre (42. §.).

5) Nach (4) erhält man allemal den vollständigen Ausdruck für dy, dergestalt, daß für jede Function y von x sich das Differential derselben durch $dy = \alpha dx + \beta dx^2 + \gamma dx^3$ + etc. ausdrücken läßt (1): doch kann man sich dabey einer sehr vortheilhaften Abkürzung bedienen. Denn weil dx einen unendlich kleinen aliquoten Theil von x bedeutet (3), mithin dx^2, dx^3, etc. unendlich kleine aliquote Theile von höhern Ordnungen sind; so verschwinden alle Glieder βdx^2, γdx^3, etc. in Vergleichung mit dem ersten Gliede αdx; folglich ist eigentlich $dy = \alpha dx$.

6) So verfährt man auch bey der Anwendung der Differentialrechnung, wobey gemeiniglich das Differential dy einer noch unbekannten Function gesucht wird; und hier erlaubt man sich noch die gegründet seyn sollende Freyheit, unter unendlich kleinen Größen keinen Unterschied zu machen, wenn sie nur gleichartig und von einer Ordnung sind. Will

man z. B. das Differential $d\mu = Mm$ des Bogens $\mu = AM$ haben, um welches er zunimmt, wenn die Abscisse $x = CP$
1. Fig. um das Differential $dx = PQ = Mq$ wächst; so bedenke man, daß bey dieser Voraussetzung auch die Ordinate $y = MP$ um das Differential $dy = mq$ wachsen muß, und daß $dx = Mq$, $dy = mq$, und die Sehne Mm unendlich kleine Linien sind, daß man daher unter dem Bogen $d\mu = Mm$ und seiner Sehne Mm keinen Unterschied angeben kann; daß also, so wie die Sehne Mm, auch der Bogen $Mm = d\mu = \sqrt{(mq^2 + Mq^2)} = \sqrt{(dy^2 + dx^2)}$ ist.

7) Aber nun entstehet die Frage, was soll man sich eigentlich bey den Differentialien dx, dy in (5) denken? Sind sie wirkliche Größen? oder Nichtse? Euler war der erste, der zu beweisen gesucht hat, daß, wenn man sonst alles genau nehmen will, man alle Differentialien gleich Null setzen muß: indessen behauptet er, daß das Differential dy einer Function y von x gegen das Differential dx in einem endlichen Verhältnisse stehen kann, wenn gleich sowohl $dy = 0$, als $dx = 0$ ist, etwa in (5) $dy : dx = \alpha : 1$, und eben davon hängt die Verschiedenheit der Differentialien ab, welche verschiedenen Functionen von einer veränderlichen Größe x zugehören können [a]. Nach ihm haben sich auch viele dafür erklärt, daß man überhaupt alle unendlich kleine Größen, zu welchen auch die Differentialien gehören sollen, nicht als wirkliche Größen, sondern als Nullen betrachten muß, wie dieses z. B. Karsten [b] und Schulz, [c] zu beweisen gesucht haben: daher erkläret der letztere die gesammte Analysis des Unendlichen, wovon die Differentialrechnung ein Theil

seyn

seyn soll, für eine ungemein künstliche Nullenrechnung (a. a. O. am Ende des ersten Abschnitts der ersten Abtheilung).

(a) Institutiones Calculi Differentialis. P. I. Cap. IV. §. 120.

(b) Mathematische Abhandlungen. I. Abhandl.

(c) Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen.

8) Andere hingegen getrauen sich nicht die Differentialien als Nullen zu betrachten; sie behaupten vielmehr, man müsse dieselben für wirkliche Größen halten, die sich eben so, wie andere endliche Größen behandeln lassen. Unter den neuesten Schriftstellern hat sich Michelsen umständlich wider die Nullenrechnung (7) erklärt. Nach seiner Theorie ist das Differential dx der absoluten veränderlichen Größe x ein unbestimmbar kleines (2), doch in sich bestimmtes, oder wirkliches Stück von x, welches eben so aus neuen Theilen besteht, wie x aus Theilen dx [(a)]. Der eigentliche Grund, warum man sich die Abkürzung in (5) erlaubt, bestehet darin, daß $\beta dx^2 + \gamma dx^3 +$ etc. eine unbestimmbar kleine Größe, mithin der Unterschied zwischen $\alpha + \beta dx + \gamma dx^2 +$ etc. und α dergestalt klein ist, daß er sich auf keine Art angeben läßt, daß also durch $\alpha : 1$ das Verhältniß $dy : dx = (\alpha + \beta dx + \gamma dx^2 + \text{etc.}) : 1$ in (5) in aller uns erreichbaren Schärfe richtig bestimmt wird, welches allein bey der Differentialrechnung kann verlangt werden [(b)].

(a) Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik III. Stück. I. Aufsatz.

(b) Eulers vollständige Anleitung zur Differential-Rechnung, aus dem Lateinischen übersetzt. Anmerkungen und Zusätze zum dritten und vierten Capitel des ersten Theils.

270. §.

Die Unbestimmtheit der Begriffe von unendlich kleinen Größen ist die Quelle aller Schwierigkeiten, welchen die Rechnungen mit denselben unterworfen sind, oder wenigstens zu seyn scheinen; allerdings wäre es zu wünschen, daß man eine solche Theorie des Unendlichen hätte, welche gar keine Veranlassung zu immerwährenden Streitigkeiten gäbe. Es hat zwar die Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften im Jahr 1784 durch eine Preisfrage die Gelehrten aufgefordert, eine klare und genau bestimmte Theorie vom Mathematisch-Unendlichen, und einen sichern, klaren, mit einem Wort wahrhaft mathematischen Grundsatz anzugeben, der sich an die Stelle des Unendlichen setzen läßt, ohne daß dadurch die sonst darauf gegründeten Untersuchungen zu schwer, oder zu langweilig werden: ob aber dadurch das, was zur vollkommenen Aufklärung und Begründung der Analysis des Unendlichen nöthig war, wirklich bewirkt worden ist, etwa in den oben angeführten Schriften von Schulz und Michelsen und dem Versuch einer logischen Auseinandersetzung des Mathematischen Unendlichen von Bendavid, mögen andere entscheiden: ich will noch nur den Uebergang von der Exhaustionsmethode der Alten zur Differentialrechnung betrachten; den ihr angemessenen Gegenstand dieser Rechnung bestimmen; und die vortheilhafteste

hafteste Methode, nach welcher er behandelt werden sollte, zu entwerfen suchen.

271. §.

In (265. §.) sind solche Gränzen für Δy aufgestellt worden, auf welche man bey der Anwendung der Lehre von endlichen Differenzen nach der Exhaustionsmethode der Alten wirklich kömmt (267. §) welche Abkürzung läßt sich aber dabey anbringen? Die Werthe von U, V, X, Y, sind aus (265. §) bekannt, und man hat

I. $\Delta y > U$ und zugleich $\Delta y < V$

oder

II. $\Delta y > X$ und zugleich $\Delta y < Y$.

Daher muß eine Differenz $\varphi = \Delta y - U$ da seyn, so daß $\Delta y = U + \varphi$ der vollständige Werth von Δy ist. Da aber $V = U + \alpha \Delta x^2 + \beta \Delta x^3 + \gamma \Delta x^4 +$ etc. für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten α, β, γ, etc. in (265. §) ist; so muß in (I) $\varphi < \alpha \Delta x^2 + \beta \Delta x^3 + \gamma \Delta x^4 +$ etc. seyn. Wenn man also Δx abnehmen läßt, und sich hierauf die unendlich kleine Differenz dx statt Δx denkt, so übergeht Δy in $dy = U + \varphi$, und es soll $\varphi < \alpha dx^2 + \beta dx^3 + \gamma dx^4 +$ ec. mithin φ eine ganz unbestimmbar kleine Größe, wenigstens von der zweyten Ordnung seyn. Aus I) folgt demnach ganz gewiß, daß $dy = U = A x^a dx + B x^b dx + C x^c dx$ + etc. (265. §) das Differential von y ist: und, so wie $y = \frac{A x^{a+1}}{a+1} + \frac{B x^{b+1}}{b+1} + \frac{C x^{c+1}}{c+1}$ + etc. wegen (I) seyn mußte (265. §), eben so muß nun derselbe Ausdruck für y wegen

des gefundenen Ausdrucks für dy seyn. Diesen Schluß kann man auf eine ähnliche Art auch aus (II) machen. Anstatt also bey endlichen Differenzen zu bleiben, und für sie Gränzen, wie (I) II) zu suchen, um daraus die Function y selbst nach (265. 266. 267. §) herleiten zu können, ziehe man die Differentialien dy nach (269. §) in Betrachtung, und aus diesen suche man, wo es nöthig ist, die Functionen selbst zu bestimmen. Wegen (I) hat man den Ausdruck für y in (265. §) vorzüglich aus dem Grunde gefunden, weil y sich als die Summe aller vorhergehenden Differenzen betrachten ließ, welche man nach (261. §) hätte erhalten können, wenn Δy bekannt gewesen wäre: nun aber wird y die Summe aller vorhergehenden Differentialien seyn, welche ebenfalls nach (261. §) aus dy entstehen würden, oder die man sich wenigstens wegen der unbestimmbar großen Zahl m bey $dx = \frac{x}{m}$, nach (261. §) denken kann.

272. §.

Ich habe wider diese Vorstellungsart (271. §) der Infinitesimalisten (269. §) nur eine Bemerkung zu machen, daß nämlich bey ihr der Geist der Exhaustionsmethode der Alten, der doch bey allen ächten Abkürzungen und Erweiterungen derselben herrschen sollte, ganz verloren geht, und die gesammte Differentio-Integralrechnung, wenn sie auf solchen Gründen beruhen soll, nichts anders im Grunde, als eine Erweiterung und Abkürzung der Wallisischen Infinitesimalrechnung ist (258. §). Die Differenz z. B. der Function $y = ax^3$ ist $\Delta y = 3ax^2 \Delta x + 3ax\Delta x^2 + a\Delta x^3$:

es mag nun hier $\Delta x = \frac{x}{m}$ ein wie immer kleiner aliquoter Theil von x seyn, man mag sich demnach x in soviel man will gleiche Theile $\Delta x, \Delta x, \Delta x - - - \Delta x$ eingetheilt denken; so ist ganz gewiß y so groß als die Summe aller vorhergehenden Differenzen, welche man aus Δy nach (261. §.) erhalten würde. Wenn man aber sagt, $\Delta x = dx$ sey unendlich klein, mithin nun $dy = 3ax^2 dx$ statt $dy = 3ax^2 dx + 3axdx^2 + adx^3$; so darf man nicht mehr sagen, y sey die Summe aller vorhergehenden Differentialien, in welche die Summe jener Differenzen übergeht, wenn dx aus Δx wird, man mag sich bey dx etwas, oder gar nichts von x denken (269. §. n. 8. 7.): zum Glück kann keine Untersuchung gewiesen werden, bey welcher man nöthig hätte, jede Function y sich als die Summe aller vorhergehenden Differentialien zu denken, wie immer auch dieses Hr. Michelsen für unentbehrlich hält.

273. §.

Alles, was man aus den Gränzen $\Delta y > U$ und $\Delta y < V$ in (265. §.), nämlich $\Delta y > Ax^a \Delta x + Bx^b \Delta x + Cx^c \Delta x + \text{etc.}$, und $\Delta y < A(x+\Delta x)^a \Delta x + B(x+\Delta x)^b \Delta x + C(x+\Delta x)^c \Delta x + \text{etc.}$ mit vollkommenster Ueberzeugung folgern kann, bestehet darinn, daß $(Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}) : 1$ die Gränze des Verhältnisses $\Delta y : \Delta x$ der Differenz Δy der Function y gegen die Differenz Δx der absoluten veränderlichen Größe x ist, und daraus die Function selbst $y = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \text{etc.}$ erkannt wird (265. §).

Denn man hat zuerst $\Delta y > Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + \text{etc.}$, woraus nothwendig folgt, daß für irgend eine Differenz φ

$$\text{I. } \Delta y = Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + \text{etc.} + \varphi,$$

$$\text{also II. } \Delta y : \Delta x = \left(Ax^a + Bx^b + \text{etc.} + \frac{\varphi}{\Delta x}\right) : 1$$

seyn muß. Weil ferner $\Delta y < A(x+\Delta x)^a\Delta x + B(x+\Delta x)^b\Delta x + C(x+\Delta x)^c\Delta x + \text{etc.}$, oder $\Delta y < Ax^a\Delta x + Bx^b\Delta x + Cx^c\Delta x + \text{etc.} + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + \text{etc.}$ für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten β, γ, δ, etc. seyn soll; so hat man, wenn man Δy aus (I.) nimmt

$$\varphi < \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + \text{etc.}, \text{ daher}$$

$$\frac{\varphi}{\Delta x} < \beta\Delta x + \gamma\Delta x^2 + \delta\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Es kann aber $\beta\Delta x + \gamma\Delta x^2 + \delta\Delta x^3 + \text{etc.}$ kleiner werden als jede denkbare, wie immer kleine gleichartige Größe (47. 3. §.): dieses gilt also auch für $\frac{\varphi}{\Delta x}$; Folglich ist $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}$, die Gränze der sich, während der allmählichen Abnahme der Differenz Δx, ändernden Function $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.} + \frac{\varphi}{\Delta x}$ (48. §), und das Verhältniß $(Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}) : 1$ ist die Gränze des veränderlichen Verhältnisses $\Delta y : \Delta x$ (88. §. Anm. V).

274. §.

Die Untersuchung über die Gränzen, zwischen welchen die Differenzen Δy gewisser Functionen y nach der Exhaustionsmethode der Alten liegen sollen, führt uns demnach ganz ungezwungen auf die Betrachtung der Differentialverhältnisse

hältnisse derselben Functionen und zeigt uns zugleich einen dem Geiste jener Methode angemessenen Weg, auf dem sich solche Verhältnisse entdecken, und aus ihnen die Functionen selbst bestimmen lassen (52. 273. 265. §.) und eben diese Verhältnisse als Gränzen, welchen die Differenzverhältnisse $\Delta y : \Delta x$ sich ohne Ende nähern, wenn die Differenzen Δx der absoluten veränderlichen Größen x ohne Ende abnehmen (nicht aber als Verhältnisse der Gränzen, welchen die Differenzen Δy, Δx selbst sich nähern), sollen den eigentlichen Gegenstand der Differentialrechnung ausmachen. So urtheilen von der Differentialrechnung die berühmtesten Analysten: alle behaupten, das, was mit Hülfe der Differentialrechnung gesucht wird, sey nichts anders als die Gränze des Verhältnisses $\Delta y : \Delta x$, nicht aber die Gränze der Differenz Δy, oder das Verhältniß der Gränzen der Differenzen Δy, Δx; und doch ist die Methode, nach welcher sie jenen Gegenstand abhandeln, vorzüglich bey der Anwendung der Differentialrechnung, dergestalt beschaffen, daß sie oft an solche Verhältnisse gar nicht zu denken scheinen, oder diese aus Gründen herleiten, welche unvermögend sind, die erwünschte Ueberzeugung zu gewähren. Daher war ich schon lange der Meinung, daß die Methode, nach welcher die Differentialverhältnisse müssen abgehandelt werden, einer ferneren Vervollkommnung bedarf, zu welcher nur die genaueste Befolgung der Archimedeischen Exhaustionsmethode führen kann; dadurch ist meine Darstellungsart im 2ten Bande veranlaßt worden. Damals war mir die Preisschrift des Herrn L'Huilier [a] nur dem Titel nach bekannt; später habe ich aber sowohl

sie, als die lateinische Erweiterung derselben [(b)] gelesen. L'Huiliers Verdienste um die Erweiterung der Gränzenlehre und ihrer Anwendung sind unverkennbar: indessen fand ich keinen hinreichenden Grund, die Methode, nach welcher ich die Gründe der Differentialrechnung abhandeln zu müssen glaubte, zu verlassen; ich wurde vielmehr in meinem Urtheile bestärkt, daß nämlich eben diese Methode sich durch viele damit verbundene Vortheile vor jeder andern empfiehlt.

(a) Exposition Elementaire des Principes des Calculs superieurs.

(b) Principiorum calculi Differentialis et Integralis Expositio Elementaris.

275. §.

Die gesammte Differential- und Integralrechnung ist mit der Erfindung der Functionen beschäftigt; derjenigen, durch welche die Exponenten der Differentialverhältnisse gewisser, bekannten oder unbekannten, Functionen bestimmt werden; und derer, welche mit gewissen Differentialverhältnissen in einer nothwendigen Verbindung stehen: der Grund jener Erfindung soll darin zu finden seyn, daß jede Function mit dem Exponenten des ihm zugehörigen Differentialverhältnisses, in Ansehung der Form und Größe, nach einem vollkommen bestimmten Gesetze verbunden ist. Schon aus diesem Grunde, und zugleich deswegen, weil durch analytische Formuln die Vernunftschlüsse, derer man sich bey der Abhandlung mathematischer Gegenstände zu bedienen hat, gleichsam versinnlicht, und eben dadurch

dieselbe

dieselbe Abhandlung ungemein abgekürzt und erleichtert wird, glaubte ich, die Differentialrechnung könne nicht vortheilhafter abgehandelt werden, als wenn man von einer allgemeinen für alle Functionen geltenden Formul ausgeht, und daraus alles herleitet, was zu einem vollständigen, wahrhaft mathematischen Lehrgebäude erfordert wird.

276. §.

Dem zufolge habe ich im ersten Abschnitte dieser Beylage dafür gesorgt, daß man im Stande seyn möge, nicht nur den binomischen Lehrsatz, sondern auch die, schon für sich merkwürdigen, logarithmischen und trigonometrischen Reihen, aus den sichersten Gründen der Elementarmathematik, und auf eine leichte Art in jeder erforderlichen Allgemeinheit herzuleiten, und darauf den Satz (31. §.) mit aller Schärfe beweisen zu können. Herr Hofrath **Kästner** hat den Ausdruck $y = ax^m + bx^{m+\delta} + cx^{m+2\delta} + \text{etc.}$ für jede Function y von x postulirt, und darauf den Beweis des Taylorischen Lehrsatzes (II. Band. 67. §.) gegründet. [a] Herr **L'Huilier** hat ebenfalls diesen Beweis angenommen, doch y allgemeiner durch $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc.}$ in der von mir (II. Band. 6. §.), und oben (31. §.) bestimmten Bedeutung ausgedrückt: er führt zwar noch einen Beweis nach Pfleiderer an, wobey aber ein neues Postulatum vorkömmt, nämlich der Ausdruck $\Delta y = \alpha \Delta x + \beta \Delta x^2 + \gamma \Delta x^3 + \text{etc.}$ für die Differenz Δy jeder Function

y von

y von x [(b)], welcher bey mir mußte erwiesen werden (57. §.).

(a) Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen. II. Auflage. 151. §.

(b) Principiorum Calculi Diff. et Integr. Exp. Elementar. 30-33. §.

277. §.

Nun war es mir sehr leicht, aus der allgemeinen Formul der Functionen, und den vollkommen bestimmten Begriffen von Differenzen, und Differentialverhältnissen, mit Zuziehung eigener Bezeichnungen (52. §.), die allgemeinen Gründe der Differentialrechnung mit aller Evidenz und Gewißheit, deren analytische Untersuchungen nach der Exhaustionsmethode der Alten fähig sind, auf einem halben Bogen herzuleiten (52-69. §.), woraus alle übrigen Sätze sich, als eben soviele, sich jedem geschickten Forscher gleichsam aufdringende, Folgen, abnehmen lassen. Die Wichtigkeit des allgemeinen Satzes (69. §.), welcher ganz dem Geiste der Archimedeischen Exhaustionsmethode entspricht (273. §.), zeigt sich erst bey wirklicher Anwendung der Differentialrechnung, wovon hinreichende Beyspiele im 3ten Abschnitte vorkommen: aber auch die Sätze (67. 68. §.), so unbedeutend sie auch scheinen mögen, tragen zur Gründlichkeit der Untersuchungen bey der Erfindung der Differentialverhältnisse, und der damit verbundenen Functionen nicht wenig bey: uad selbst der Umstand verdient einige Aufmerksamkeit, daß nach dieser Methode ein Anfänger in Stand

gesetzt

gesetzt wird, aus den wenigen allgemeinen Gründen (52 bis 69. §.) sich von der Brauchbarkeit der Differentialverhältnisse bey mathematischen Untersuchungen, und dem eigentlichen Grunde davon zu überzeugen, ohne dazu eines Beyspiels zu bedürfen (70. §.).

278. §.

Ueberhaupt wird man bemerken, daß ich die Erfindung der Differentialverhältnisse, für bekannte und unbekannte Functionen auf zweene mit aller Schärfe erwiesene Sätze (59. 69. §.) gegründet habe. Ueberall blieb ich dem in (52. §.) festgesetzten Gegenstande der Differentialrechnung getreu; überall, sowohl bey der Theorie im 2ten, als bey der Anwendung im 3ten Abschnitte, werden nur die Differentialverhältnisse betrachtet, und ihre Exponenten aus ihren eigenthümlichen Gründen hergeleitet, dergestalt, daß man hier gar keinen Grund finden kann, die Differentialrechnung zur Infinitesimalrechnung, oder zu der sogenannten Analysis des Unendlichen, als einen Theil davon, zu rechnen: es ist vielmehr einleuchtend, daß sie hier, und überall, wo sie zweckmäßig abgehandelt wird, als ein Theil der Analysis endlicher Größen erscheint, und wirklich erscheinen muß. Die Zeichen dy, dx statt $\Delta y, \Delta x$ sind durch die Betrachtung der unendlich kleinen Differenzen, der sogenannten Differentialien, und ihrer Verhältnisse gegen einander veranlaßt worden (269. §.), wovon die Exponenten der Differentialverhältnisse und diese Verhältnisse selbst wesentlich unterschieden sind (274. §.): werden daher blos

blos diese Exponenten bey Untersuchungen gebraucht; so müssen sie eigene Zeichen haben: dafür habe ich die Zeichen dy, dx beybehalten, welche demnach hier endliche Größen bedeuten. Herr L'Huilier, um doch den Exponenten des Differentialverhältnisses einer Function y von x von dem sonst üblichen Differential zu unterscheiden, bezeichnet jenen mit $\frac{dy}{dx}$: zweckmäßiger würde man ihn mit ey bezeichnen, zu geschweigen, daß auch der Gebrauch dieses Zeichens bey Rechnungen viel bequemer seyn würde.

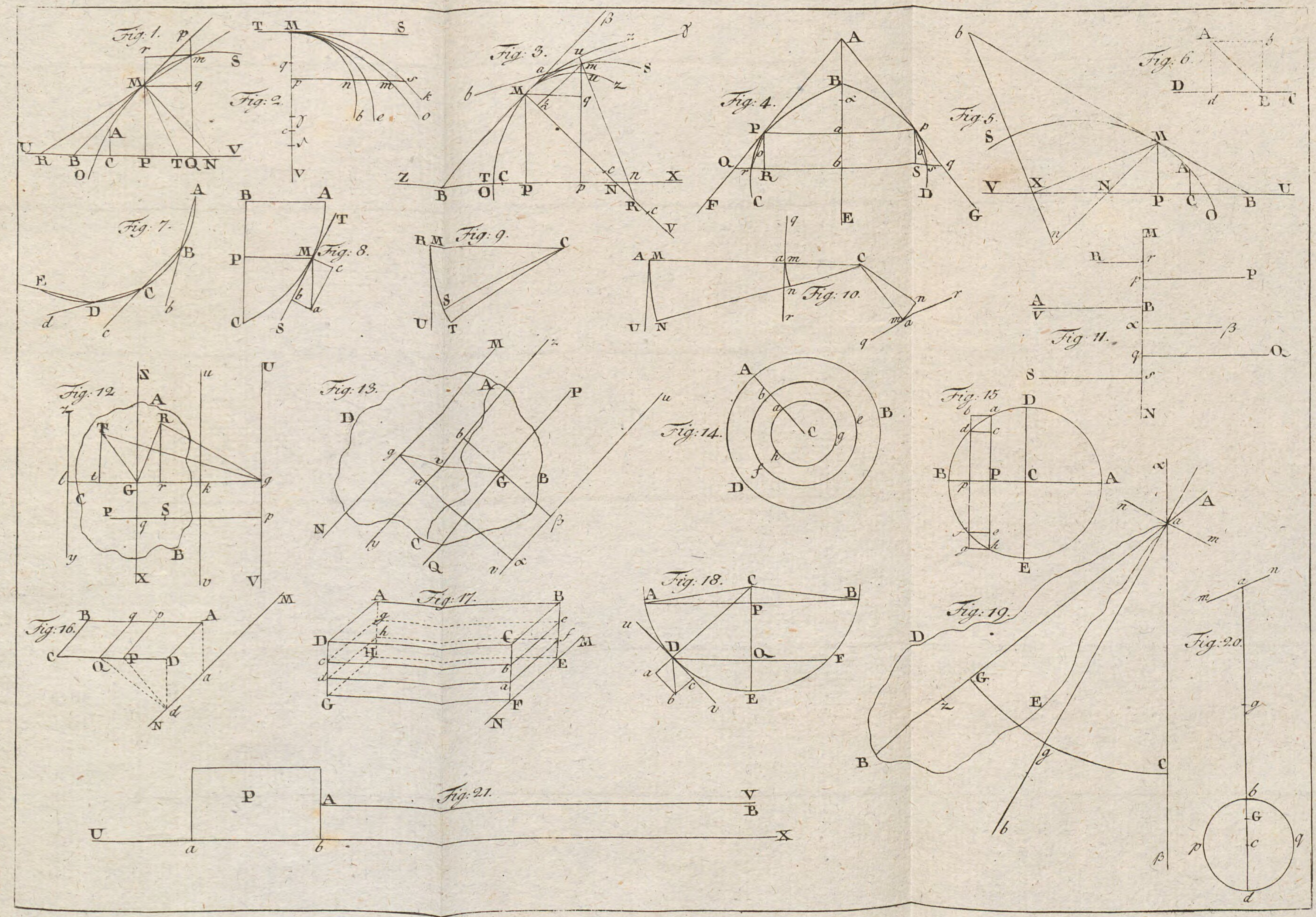


Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.
Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
Fig: 11.
Fig: 12
Fig: 13.
Fig: 14.
Fig: 15
Fig: 16.
Fig: 17.
Fig: 18.
Fig: 19.
Fig: 20.
Fig: 21.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Pasquich, Johann, ca. 1753-15.11.1829

Unterricht in der Mathematischen Analysis und Maschinen-Lehre
Erweiterungen und Berichtigungen enthaltend

Bd.: [3]

Leipzig 1798

Math.p. 409 m-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137691-2
VD18 8007247